
Distances

Corrigés d'exercices / Version du 20 juillet 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 260 : N°5, 8, 9, 13

Page 264 : N°41

Page 261 : N°16, 19, 22, 24

Page 265 : N°55

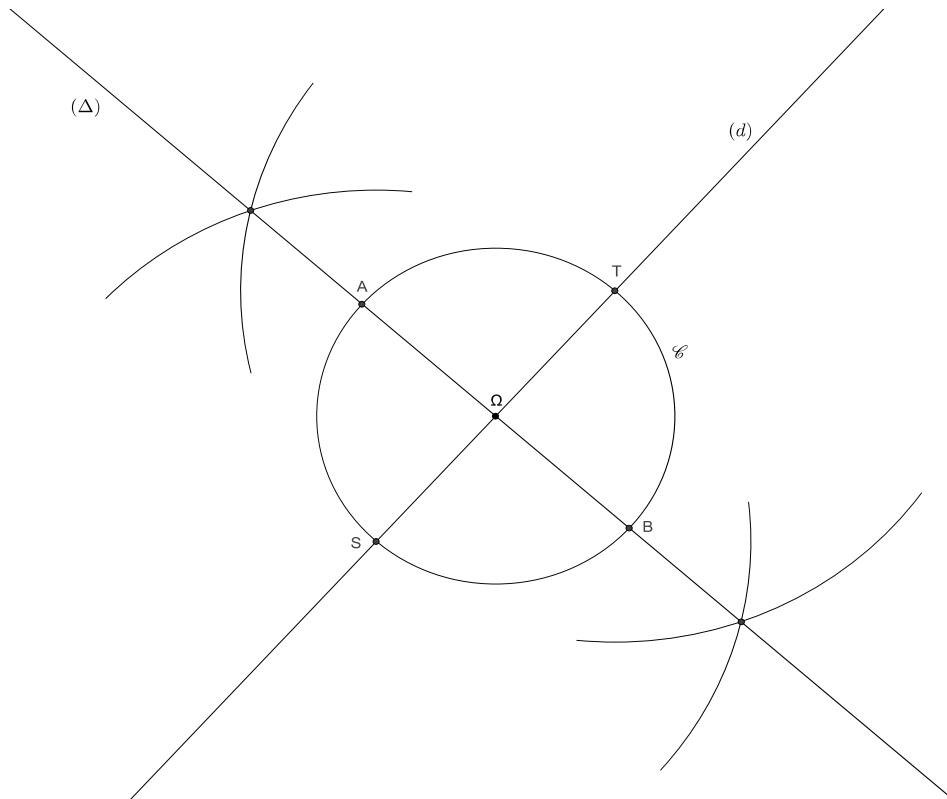
Page 262 : N°30, 34

Page 266 : N°62

N°5 page 260

1. La construction est classique et nous la rappelons rapidement :

- On trace une droite (d) .
- On trace un cercle \mathcal{C} de rayon 1cm et dont le centre Ω est situé sur (d) .
- Le cercle \mathcal{C} coupe la droite (d) en S et T.
- On construit la médiatrice (Δ) du segment [ST].
- La droite (Δ) coupe le cercle \mathcal{C} en deux points : A et B situés à 1cm de (d) .

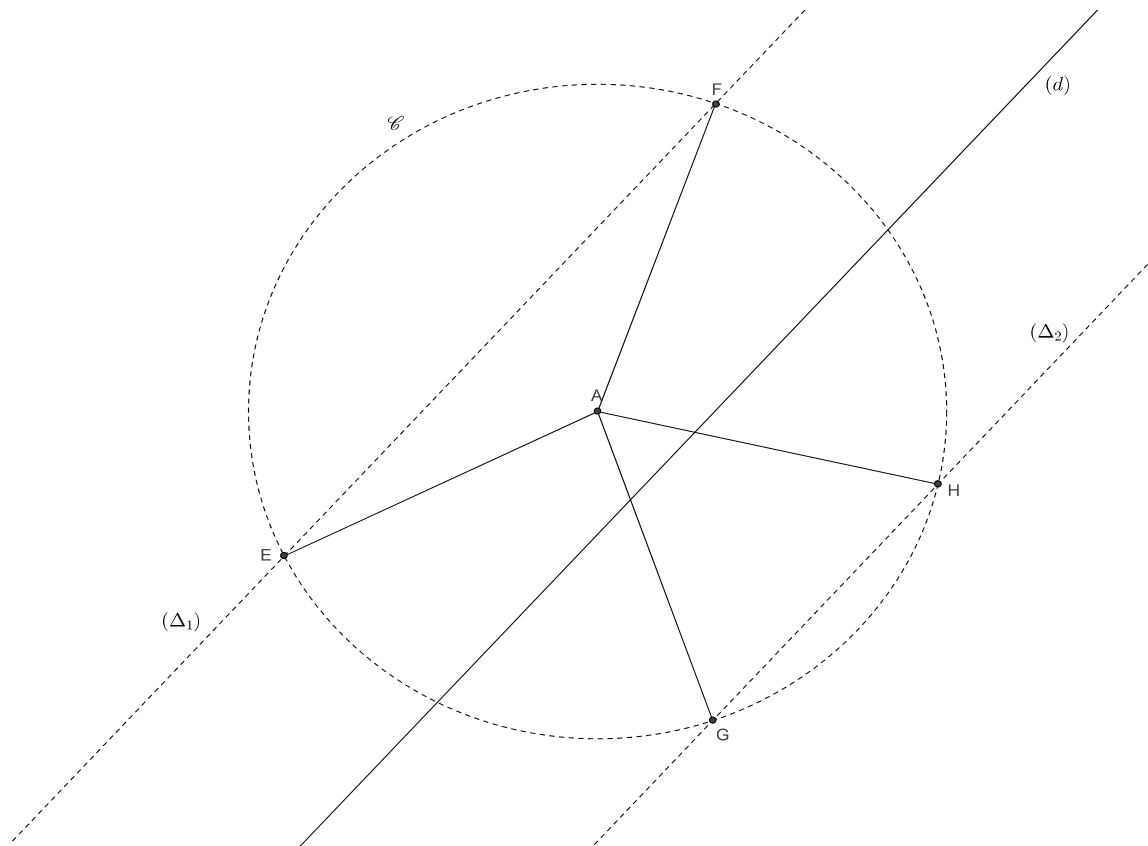


2. L'ensemble des points situés à 2,5cm de la droite (d) est constitué de deux droites parallèles à (d) que nous notons (Δ_1) et (Δ_2) (cf. l'exercice 4 de la page 260).

L'ensemble des points situés à 4cm de A est, par définition, le cercle de centre A et de rayon 4cm. Nous le notons \mathcal{C} (voir figure ci-dessous).

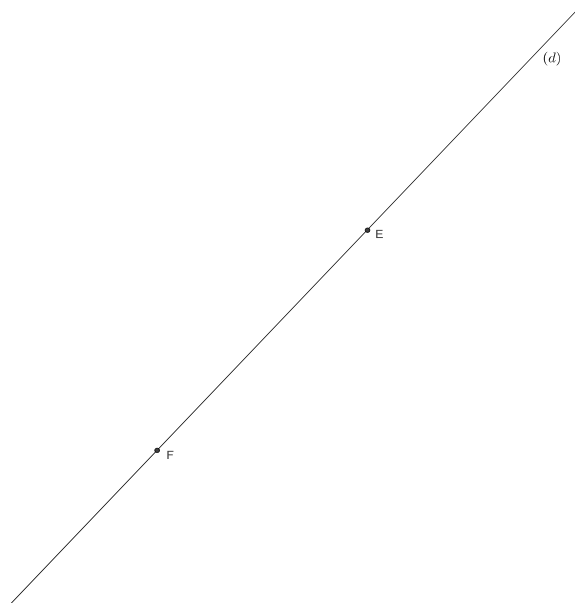
En considérant la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A, on montre facilement que celui-ci est respectivement situé à $2,5 - 1 = 1,5\text{cm}$ et $2,5 + 1 = 3,5\text{cm}$ des droites (Δ_1) et (Δ_2) . Ces deux distances étant inférieures à 4cm, on en déduit que chacune des droites (Δ_1) et (Δ_2) coupe le cercle \mathcal{C} en deux points.

L'ensemble des points situés à la fois à 2,5cm de la droite (d) et à 4cm du point A comporte donc un total de 4 points (E, F, G et H sur la figure).

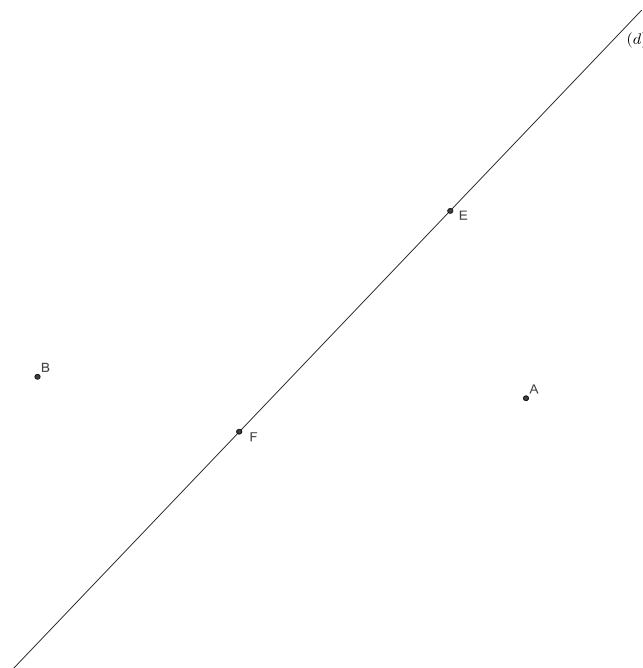


N°8 page 260

1. On a immédiatement la figure de base suivante (n'étant pas à l'échelle, la distance AB n'est pas égale à 5cm) :



2. On procède comme dans la première question de l'exercice 5 par exemple (pour plus de lisibilité, nous avons placé les points A et B de part et d'autre de la droite (d)).



Distances

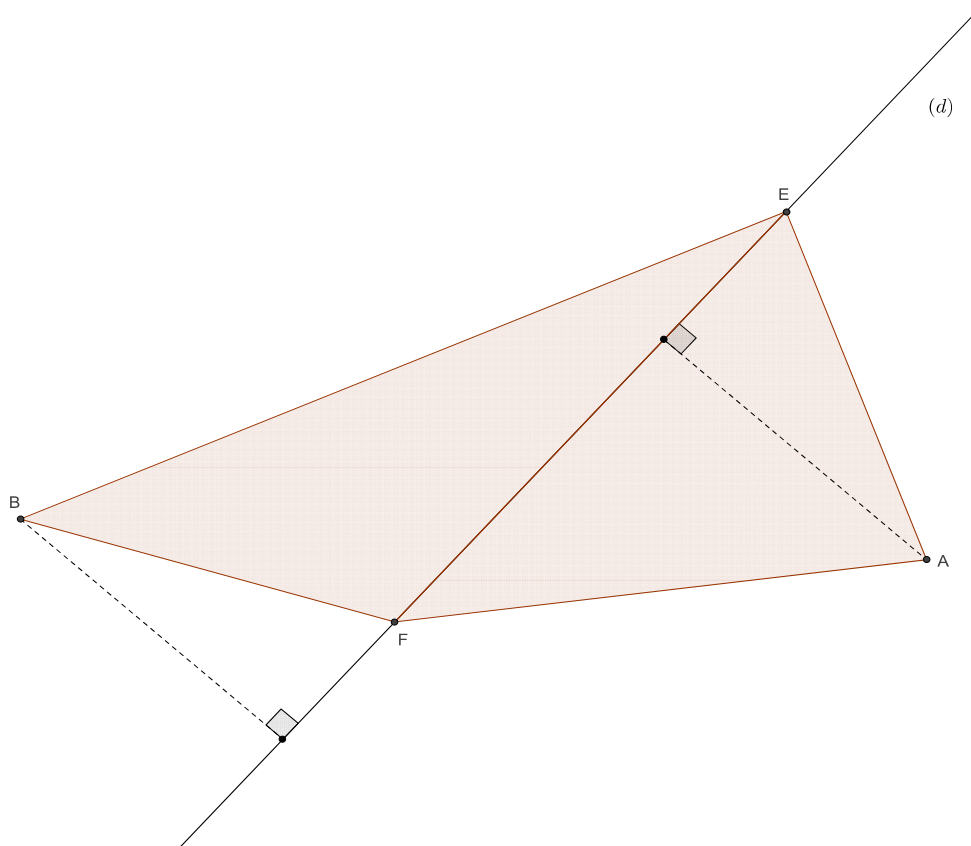
Corrigés d'exercices / Version du 20 juillet 2012

3. Les hauteurs issues des points A et B dans les triangles EFA et EFB respectivement ont pour longueur commune 3cm puisque les points A et B sont situés à 3 cm de la droite (d) à laquelle appartiennent les points E et F (les droites (d) et (EF) sont confondues).

On a donc, en notant $\mathcal{A}(EFA)$ et $\mathcal{A}(EFB)$ les aires respectives des triangles EFA et EFB :

$$\mathcal{A}(EFA) = \frac{1}{2} \times EF \times d(A, (d)) = \frac{1}{2} \times EF \times d(B, (d)) = \mathcal{A}(EFB)$$

$$\text{Soit : } \mathcal{A}(EFA) = \mathcal{A}(EFB) = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}.$$



Les deux triangles EFA et EFB admettent pour aire commune $\frac{15}{2} = 7,5\text{cm}^2$.

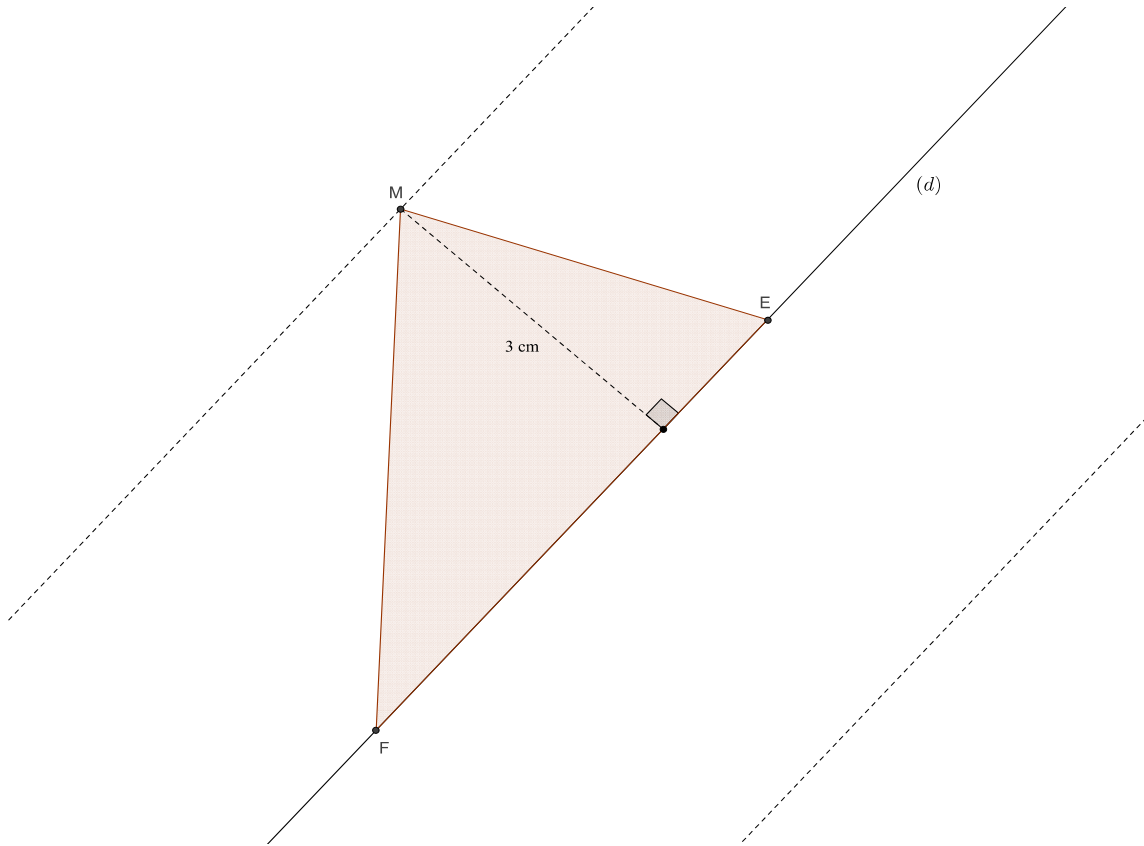
4. L'aire du triangle EFM est égale à :

$$\mathcal{A}(EFM) = \frac{1}{2} \times EF \times d(M, (EF)) = \frac{1}{2} \times 5 \times d(M, (EF)) = 2,5 \times d(M, (EF))$$

Distances

Corrigés d'exercices / Version du 20 juillet 2012

Pour que l'aire du triangle EFM soit égale à $7,5\text{cm}^2$, il faut et il suffit donc que la distance du point M à la droite (EF) (c'est-à-dire la distance du point M à la droite (d)) soit égale à 3cm. L'ensemble des points situés à 3cm de la droite (d) est composé de deux droites parallèles à (d) (cf. la figure ci-dessous).



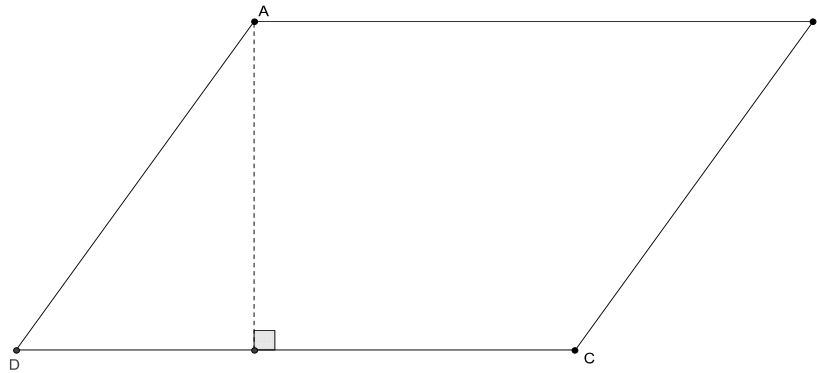
N°9 page 260

L'aire du parallélogramme ABCD, notée $\mathcal{A}(ABCD)$, est égale au produit de la longueur AB par la longueur de la hauteur issue du sommet A (cf. la figure ci-après). Cette longueur n'est autre que la distance du point A à la droite (CD) : $d(A, (CD))$.

On a donc : $\mathcal{A}(ABCD) = 20 = AB \times d(A, (CD)) = 5 \times d(A, (CD))$.

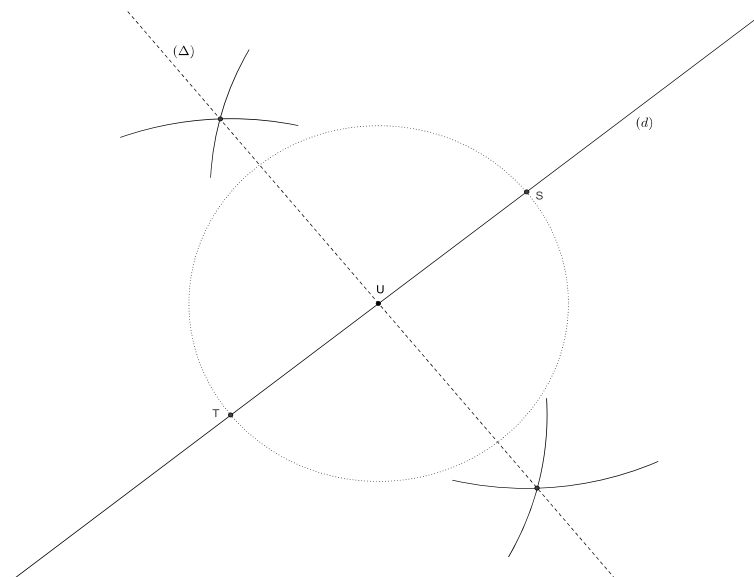
On en déduit immédiatement : $d(A, (CD)) = \frac{20}{5} = 4$.

La distance du point A à la droite (CD) est égale à 4cm.



N°13 page 260

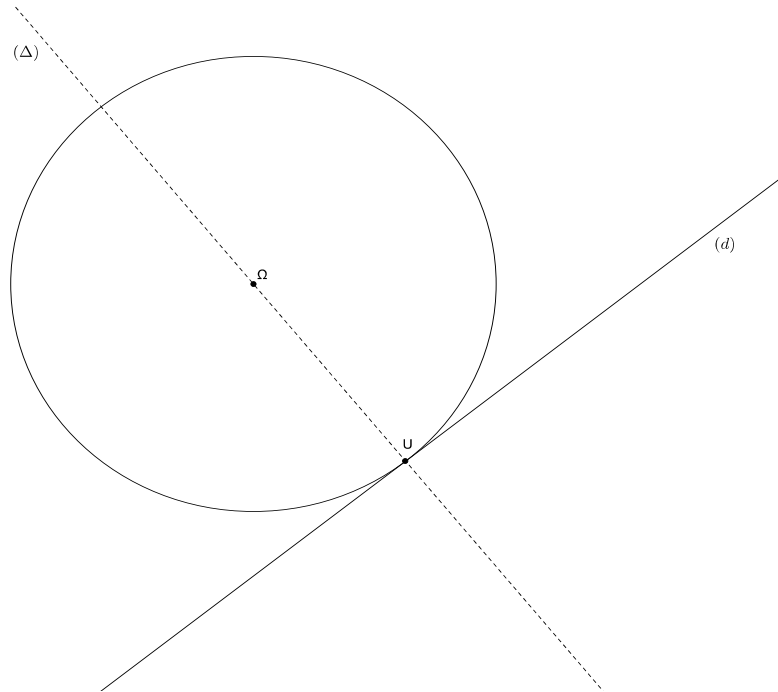
1. Soit O le centre d'un cercle tangent à la droite (d) au point U . Par définition de la tangente, la droite (OU) est perpendiculaire à la droite (d) en U . Ainsi, on construit d'abord la perpendiculaire (Δ) à la droite (d) passant par U (construction classique. Sur la figure ci-dessous, nous avons laissé les traits de construction apparents).



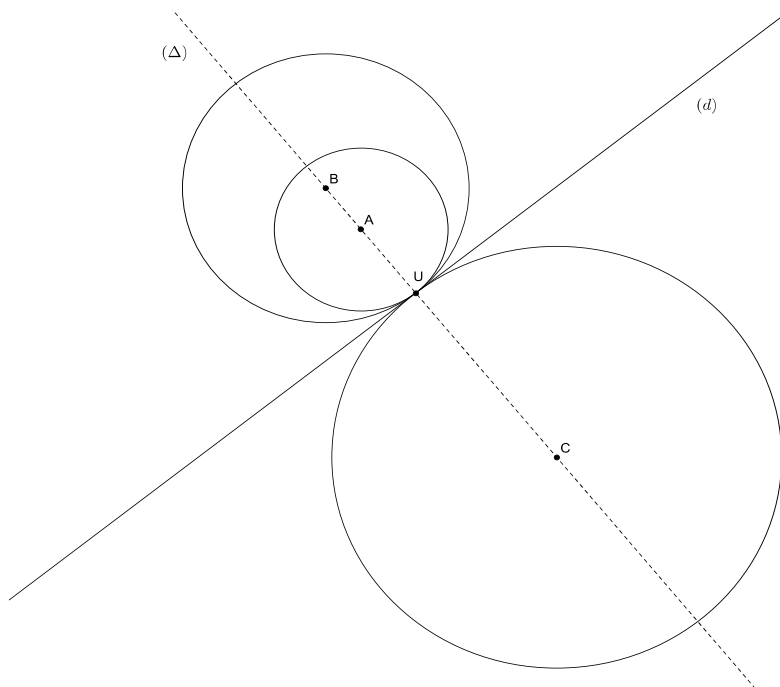
Distances

Corrigés d'exercices / Version du 20 juillet 2012

Pour construire un cercle tangent en U à la droite (d) , il suffit de considérer un point Ω sur (Δ) différent de U et de construire le cercle de centre U et de rayon ΩU :



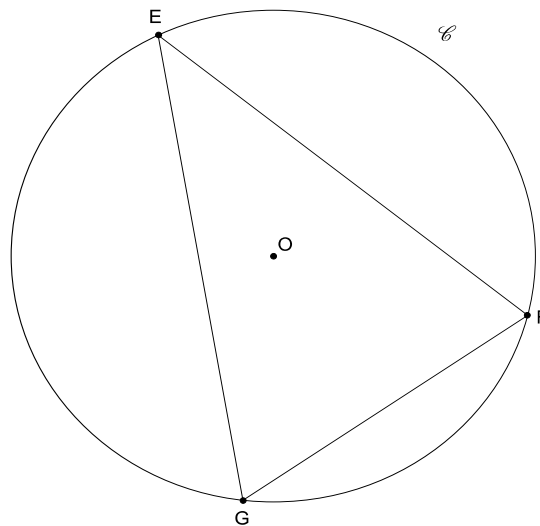
On positionne alors trois points A , B et C différents de U sur la droite (Δ) pour obtenir finalement une figure similaire à celle-ci :



2. D'après ce qui a été précisé à la question précédente, les centres A, B et C des trois cercles appartiennent à la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point U.

N°16 page 261

1. La figure fournie ci-dessous n'est pas à l'échelle.



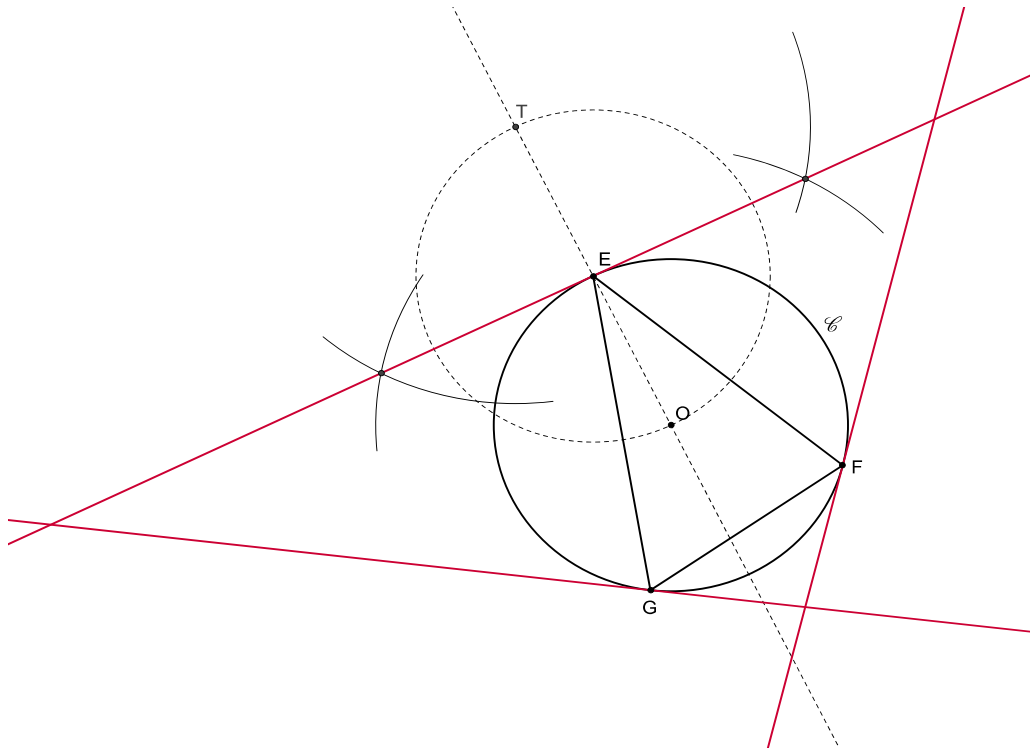
2. Raisonnons sur le point E.

La tangente au cercle \mathcal{C} en E est la droite perpendiculaire à (OE) passant par le point E.

La construction de cette perpendiculaire est classique :

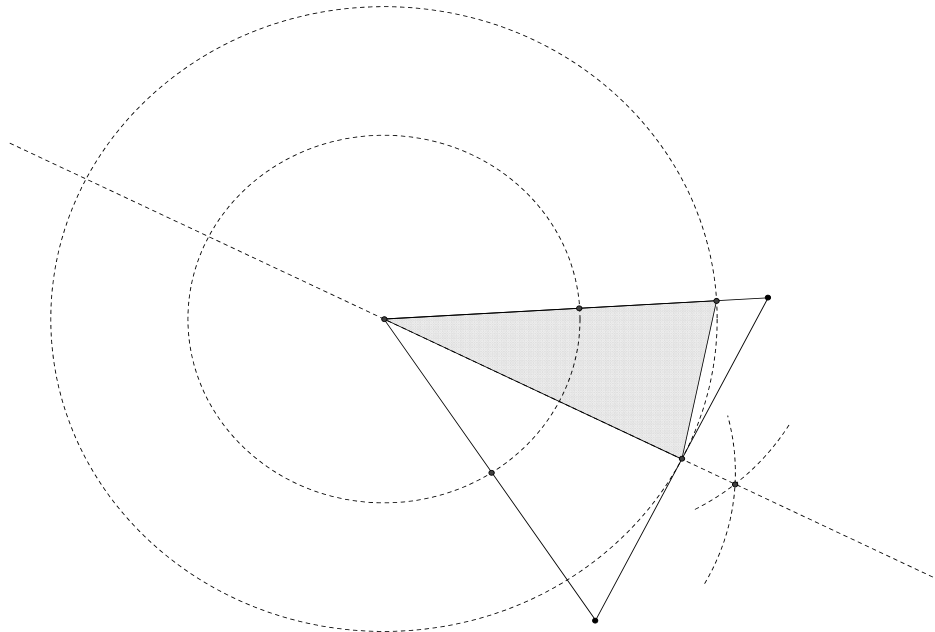
- On trace la droite (OE) .
- On positionne sur cette droite un segment dont E est le milieu. On peut, par exemple (c'est ce que nous avons fait sur la figure ci-après), considérer le point T, symétrique de O par rapport au point E.
- On construit la médiatrice de ce segment (donc du segment $[OT]$ sur notre figure).

On procède de façon similaire avec les deux autres points (pour ces deux autres tangentes, les traits de construction ne sont pas apparents).



N°19 page 261

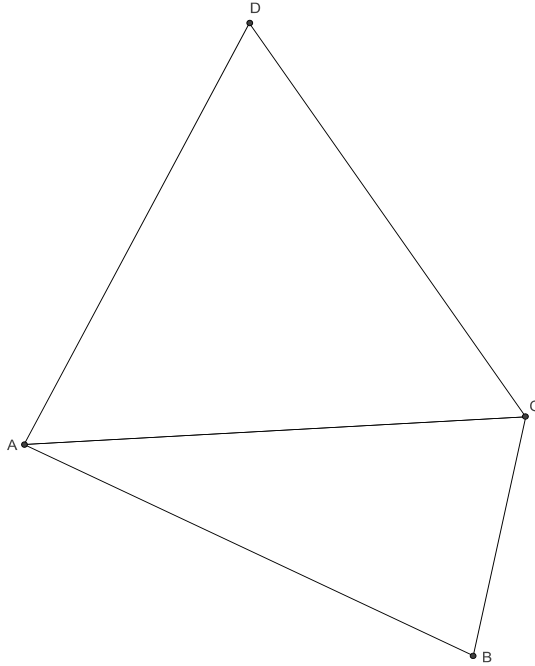
- Nous ne redonnons pas le détail de la construction d'un triangle isocèle d'angle au sommet de mesure 30° mais nous rappelons qu'un tel triangle se construit aisément à partir d'un triangle équilatéral (cf. les traits de construction sur la figure ci-dessous).



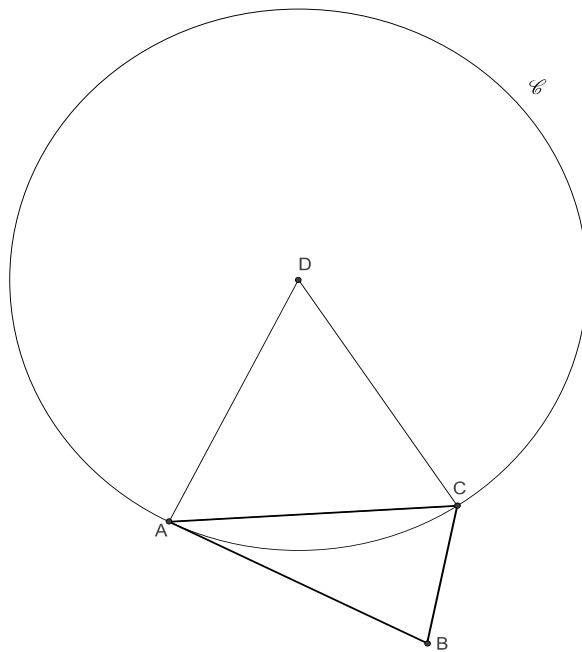
Distances

Corrigés d'exercices / Version du 20 juillet 2012

- On obtient facilement :



- a. On a cette fois :



b. Notons, dans un premier temps que le triangle ACD étant équilatéral, on a : $DC = DA$.
On en déduit immédiatement que le point A appartient au cercle \mathcal{C} .

Par hypothèse, on a : $\widehat{BAC} = 30^\circ$ et, le triangle ACD étant équilatéral, $\widehat{CAD} = 60^\circ$.
Les triangles ACD et ABC étant situés de part et d'autre de la droite (AC), les angles \widehat{BAC} et \widehat{CAD} sont adjacents. On a donc : $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.
Les droites (AB) et (AD) sont donc perpendiculaires et on en déduit immédiatement que la droite (AB) est tangente en A au cercle \mathcal{C} .

N°22 page 261

Données :

- La droite (IU) est perpendiculaire à la droite (Oz) et U est un point de (Oz).
- La droite (IV) est perpendiculaire à la droite (Ot) et V est un point de (Ot).

Définition :

Distance d'un point à une droite

Conclusion :

La distance du point I à la droite (Oz) est égale à IU et la distance du point I à la droite (Ot) est égale à IV.

Données :

Le point I appartient à la bissectrice [Ox) de l'angle \widehat{tOz} .

Propriété :

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle saillant alors il est équidistant des côtés de cet angle.

Conclusion :

IU = IV

La première égalité est ainsi établie.

Données :

La demi-droite $[Ox)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{zOt} .

Les points U et V appartiennent respectivement aux demi-droites $[Oz)$ et $[Ot)$.

Définition :

Bissectrice d'un angle saillant.

Conclusion :

$$\widehat{UOI} = \widehat{IOV}$$

Données :

Le triangle IOU est rectangle en U.

Le triangle IOV est rectangle en V.

$$\widehat{UOI} = \widehat{IOV}$$

Définition :

Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Conclusion :

$$\frac{OU}{OI} = \cos \widehat{UOI} = \cos \widehat{IOV} = \frac{OV}{OI}$$

D'où : $OU = OV$

La deuxième égalité est ainsi établie.

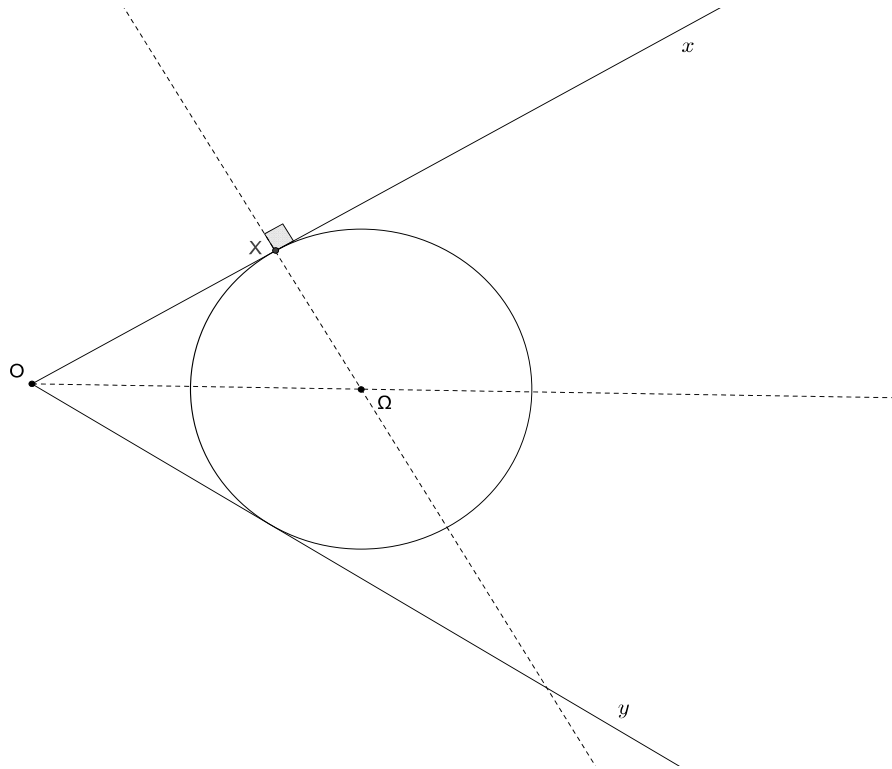
N°24 page 261

Nous nous appuyons sur le résultat principal de l'exercice N°23 : le centre d'un cercle tangent aux côtés d'un angle saillant est situé sur la bissectrice de cet angle.

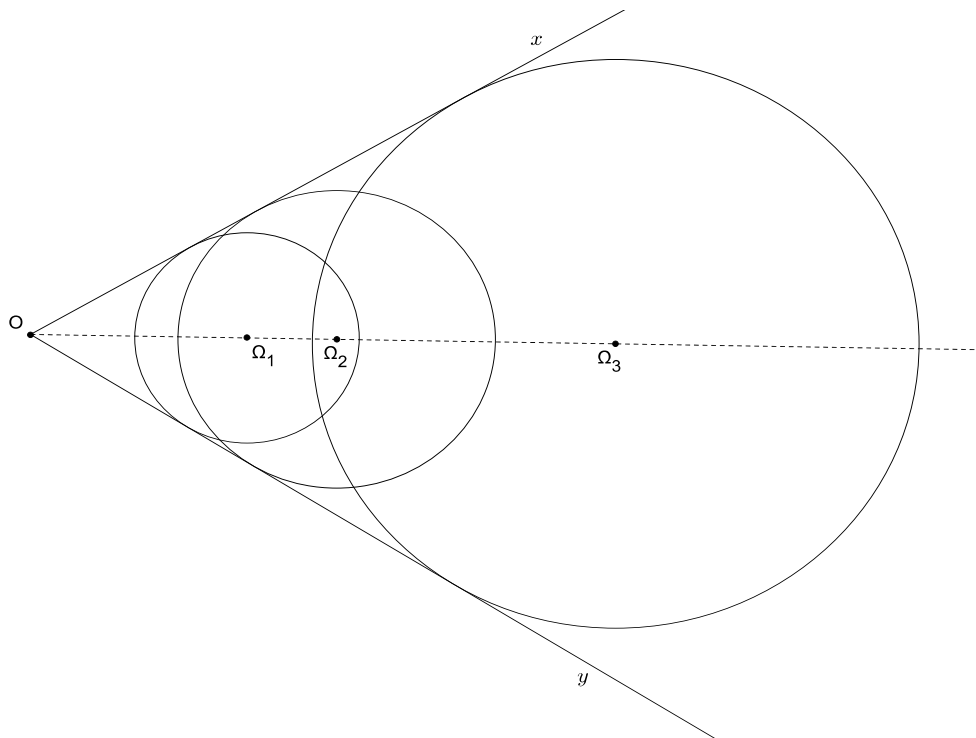
Nous détaillons ci-dessous la construction d'un tel cercle.

- Nous commençons par construire la bissectrice de l'angle \widehat{xOy} .
- Nous positionnons ensuite un point quelconque Ω sur cette bissectrice.
- Nous construisons alors la perpendiculaire à $[Ox)$ (ou à $[Oy)$ au choix) passant par Ω . Elle coupe $[Ox)$ en X.
- Nous traçons le cercle de centre Ω et de rayon ΩX .

Sur la figure ci-après, nous avons seulement fait apparaître la bissectrice de l'angle \widehat{xOy} ainsi que la perpendiculaire à $[Ox)$ passant par Ω .



En effectuant trois fois cette construction, on obtient une figure semblable à celle-ci :



N°30 page 262

Comme centre du cercle inscrit dans le triangle BST, le point I est l'intersection des bissectrices de ce triangle.

Données :

La demi-droite [SI) est la bissectrice de l'angle \widehat{BST} .

$$\widehat{IST} = 34^\circ$$

Définition :

Bissectrice d'un angle.

Conclusion :

$$\widehat{BSI} = \widehat{IST} = 34^\circ$$

$$\widehat{BSI} = 34^\circ$$

En raisonnant de façon similaire avec l'angle \widehat{BTS} , on obtient :

$$\widehat{BTI} = 29^\circ$$

Données :

$$\widehat{BST} = 2 \times \widehat{IST} = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$$

$$\widehat{BTS} = 2 \times \widehat{ITS} = 2 \times 29^\circ = 58^\circ$$

Propriété :

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Conclusion :

$$\widehat{BTS} + \widehat{BST} + \widehat{SBT} = 180^\circ$$

$$\text{D'où : } \widehat{SBT} = 180^\circ - (\widehat{BTS} + \widehat{BST}) = 180^\circ - (58^\circ + 68^\circ) = 54^\circ$$

$$\widehat{SBT} = 54^\circ$$

Données :

$$\widehat{SBT} = 54^\circ$$

Définition :

Bissectrice d'un angle.

Conclusion :

$$\widehat{SBT} = 2 \times \widehat{IBT}$$

$$\text{D'où : } \widehat{IBT} = \frac{\widehat{SBT}}{2} = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ$$

$$\boxed{\widehat{IBT} = 27^\circ}$$

N°34 page 262

- La figure faisant essentiellement apparaître des angles, on doit penser à établir le résultat en montrant que l'angle \widehat{BAC} est égal à 90° .

Données :

[BO) est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} .

$$\widehat{ABO} = 28^\circ.$$

Définition :

Bissectrice d'un angle.

Conclusion :

$$\widehat{OBC} = \widehat{ABO} = 28^\circ$$

Données :

$$\widehat{OBC} = 28^\circ.$$

$$\widehat{BOC} = 135^\circ.$$

Propriété :

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Conclusion :

$$\widehat{OBC} + \widehat{BOC} + \widehat{BCO} = 180^\circ = 28^\circ + 135^\circ + \widehat{BCO} = 163^\circ + \widehat{BCO}.$$

$$\text{D'où : } \widehat{BCO} = 180^\circ - 163^\circ = 17^\circ.$$

Données :

$[CO)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{BCA} .

$$\widehat{BCO} = 17^\circ.$$

Définition :

Bissectrice d'un angle.

Conclusion :

$$\widehat{BCO} = \widehat{OCA} = 17^\circ$$

Données :

$$\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{ABO} = 2 \times 28^\circ = 56^\circ.$$

$$\widehat{ACB} = 2 \times \widehat{ACO} = 2 \times 17^\circ = 34^\circ.$$

Propriété :

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Conclusion :

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ = 56^\circ + 34^\circ + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}.$$

$$\text{D'où : } \widehat{BAC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

La mesure de l'angle \widehat{BAC} étant égale à 90° , le triangle ABC est rectangle en A.

2. On peut rapidement donner le résultat mais nous formalisons un peu :

Données :

$[BO)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} .

$[CO)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{BCA} .

O est le point d'intersection des deux bissectrices $[BO)$ et $[CO)$ (cela va de soi d'après les deux données précédentes mais nous le précisons néanmoins).

Propriété :

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Conclusion :

$[AO)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .

Données :

$[AO)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .

$$\widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Définition :

Bissectrice d'un angle.

Conclusion :

$$\widehat{BAO} = \widehat{OAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\boxed{\widehat{BAO} = 45^\circ}$$

N°41 page 265

1. Les points A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2,5cm. On a donc $OA = OB$. Le triangle OAB est donc isocèle en O.
Notons H le pied de la hauteur issue de O dans ce triangle.
Le triangle OAB étant isocèle en O, la demi droite $[OH)$ est la hauteur, la bissectrice et la médiane issue de O. H est donc le milieu du segment $[AB]$.
La droite (OH) étant perpendiculaire à la droite (AB) , on en déduit également que la distance du point O à la droite (AB) est égale à la longueur OH.

Dans le triangle OHA rectangle en H, on a donc : $AH = \frac{AB}{2} = 4\text{cm}$ et $OA = 2,5\text{cm}$.

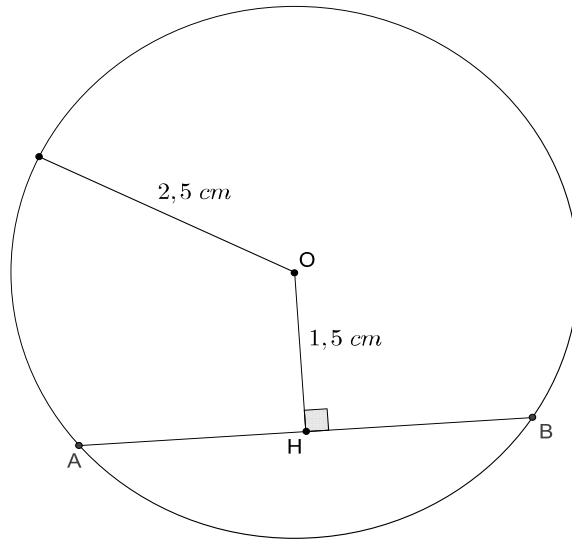
D'après le théorème de Pythagore, on a : $OH^2 + HA^2 = OA^2$.

D'où : $OH^2 = OA^2 - HA^2 = 2,5^2 - 2^2 = 6,25 - 4 = 2,25 = 1,5^2$.

Une longueur étant positive, on en déduit immédiatement : $OH = 1,5$.

$$\boxed{OH = 1,5\text{cm}}$$

2. La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.

**N°44 page 264**

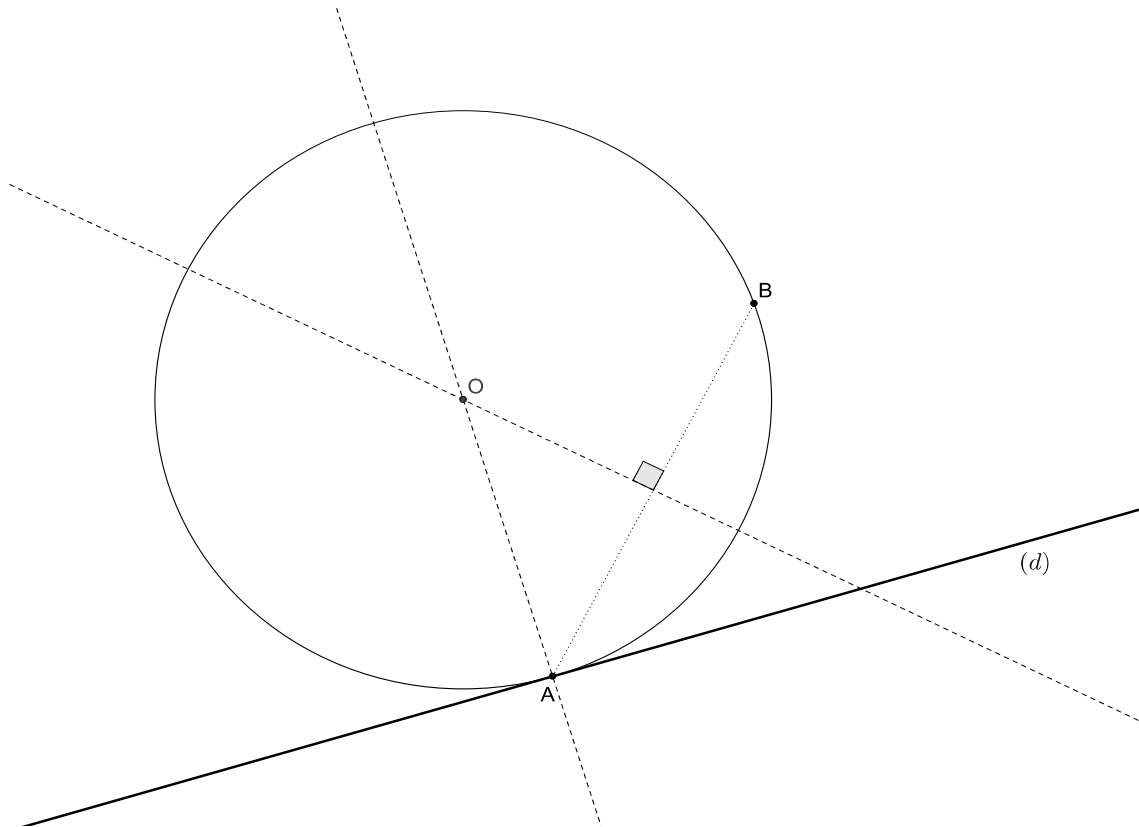
Notons \mathcal{C} le cercle cherché et O son centre.

Puisque \mathcal{C} est tangent à la droite (d) en A, le point O appartient à la perpendiculaire à (d) passant par A.

Par ailleurs, puisque le point B appartient au cercle \mathcal{C} , on a : $OA = OB$. Ainsi, le point O appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Le point O est ainsi le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (d) passant par A et de la médiatrice du segment $[AB]$ (notons que ce point d'intersection existe puisque les deux droites considérées ne sont pas parallèles. Si c'était le cas, le point A appartiendrait à la droite (d)).

La construction de ces deux droites est classique et on obtient finalement la figure ci-après.



N°55 page 264

Par définition des points J et K, le quadrilatère AJIK comporte trois angles droits.
 Comme la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360° , on en déduit immédiatement que le quatrième angle (l'angle \widehat{JIK}) est également droit.
 Les quatre angles du quadrilatère AJIK étant droits, nous avons donc affaire à un rectangle.

Par ailleurs, le point I est le point d'intersection de deux bissectrices du triangle ABC. C'est donc le point de concours des bissectrices de ce triangle et il est donc équidistant des trois côtés du triangle. On a donc, en particulier : $IJ = IK$.

Le rectangle AJIK ayant deux côtés consécutifs de même longueur, nous en déduisons immédiatement que tous ses côtés sont de même longueur.

Enfinement :

Le quadrilatère AJIK est un carré.

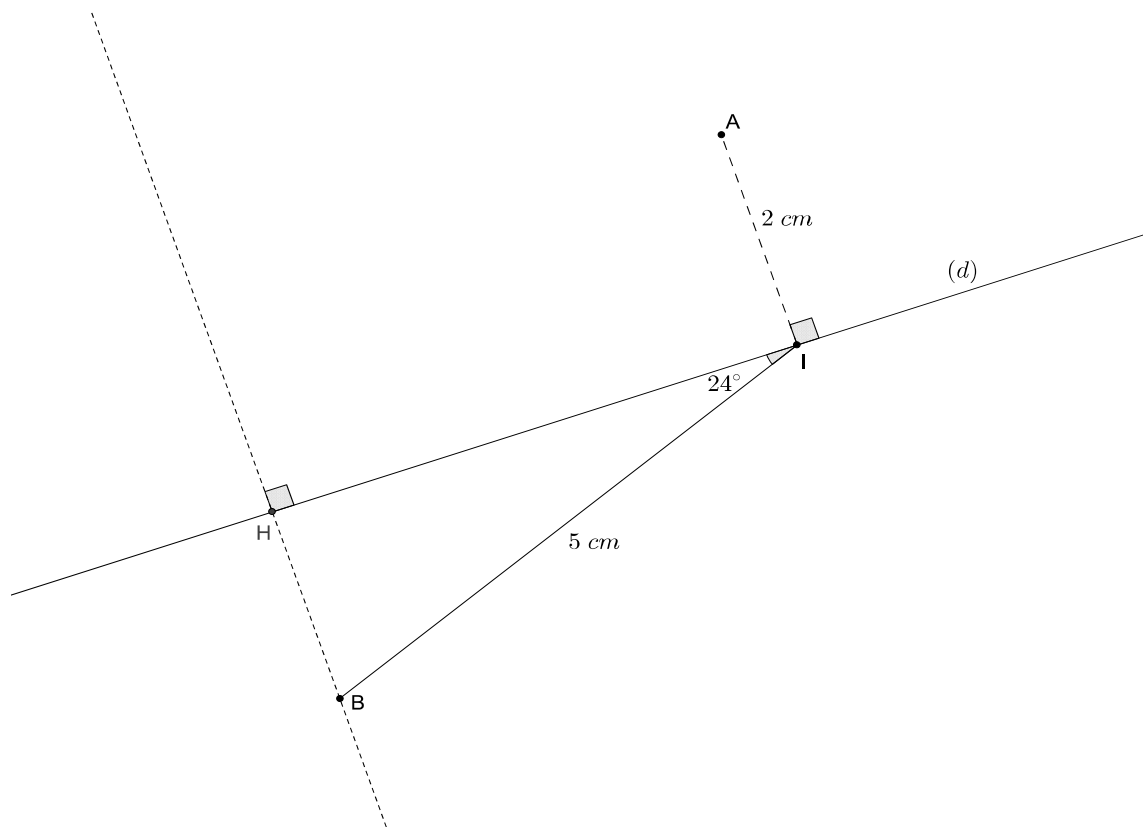
N°62 page 266

D'après la figure, la distance du point A à la droite (d) vaut 2 cm.

Il nous faut donc déterminer la distance du point B à la droite (d).

Nous commençons par compléter la figure en traçant la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point B. Nous nommons H le point d'intersection de ces deux droites (cf. la figure ci-dessous). Il nous faut déterminer la longueur HB.

Nous notons aussi I le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par A.



Dans le triangle BHI rectangle en H, les angles \widehat{HBI} et \widehat{HIB} sont complémentaires.

Or, on a : $\widehat{HIB} = 24^\circ$.

On en déduit donc : $\widehat{HBI} = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$.

On a alors : $\cos \widehat{HBI} = \frac{HB}{BI}$. D'où : $HB = BI \times \cos \widehat{HBI}$.

Soit : $HB = 5 \times \cos 66^\circ \approx 2,034 > 2$

Le point le plus proche de la droite (d) est le point A.