$4^{\text{ème}}$ 1

INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

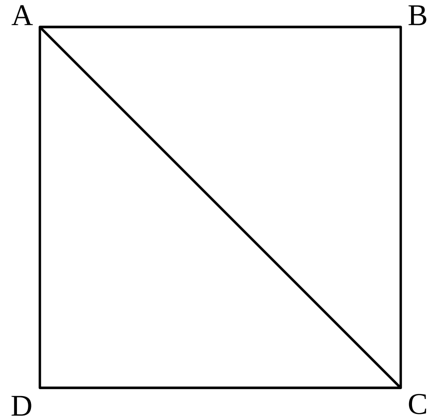
Cosinus

Jeudi 12 avril 2012

CORRIGE

EXERCICE N°1

Nous pouvons fournir la figure suivante pour fixer les idées. Nous avons fait apparaître une diagonale qui est en l'occurrence la bissectrice des angles $\widehat{\text{DAB}}$ et $\widehat{\text{BCD}}$ (il ne fallait pas démontrer ce résultat classique dans le carré). On en déduit immédiatement que l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ admet pour mesure 45°.



On a alors :

Données
ABC triangle rectangle en B.
$\text{AB} = a$ et $\widehat{\text{BAC}} = 45°$

Définition
Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Conclusion

$$\cos\widehat{\text{BAC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}$$

Soit :

$$\cos 45° = \frac{a}{\text{AC}}$$

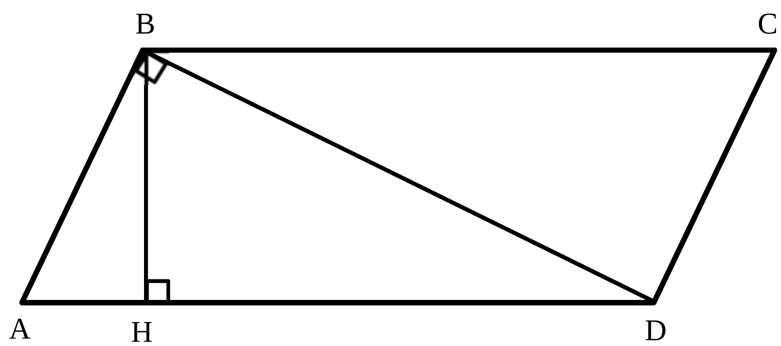
D'où : $a = \text{AC} \times \cos 45°$ et enfin :

$$\text{AC} = \frac{a}{\cos 45°} = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = a \times \sqrt{2}$$

Conclusion générale (à connaître !) :

Dans un carré, la longueur de la diagonale est égale à la longueur du côté multipliée par la racine carrée de 2.

EXERCICE N°2



ABCD est un parallélogramme.
Le point H est le pied de la hauteur issue du sommet B.
On donne : $AB = 5$ et $AH = 2$.

1. Comme le point H appartient au segment $[AD]$, on a immédiatement : $\widehat{DAB} = \widehat{HAB}$.

   Données
   Le triangle ABH est rectangle en H.
   $AB = 5$ et $AH = 2$.

   Définition
   Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

   Conclusion

$$\cos \widehat{HAB} = \frac{AH}{AB}$$

Soit : $\cos \widehat{HAB} = \frac{2}{5} = 0,4$.

D'où : $\widehat{DAB} = \widehat{HAB} = \arccos \frac{2}{5} = \arccos 0,4 \simeq 66,4°$.

L'angle $\widehat{DAB}$ admet pour mesure exacte $\arccos 0,4$ soit environ 66,4°.

2. Le résultat de l'énoncé ($BH = \sqrt{21}$) ne suggérait-il pas l'utilisation du théorème de Pythagore ?

   Données
   Le triangle ABH est rectangle en H.
   $AB = 5$ et $AH = 2$.

   Propriété
   Théorème de Pythagore.

   Conclusion

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

   Soit : $5^2 = 2^2 + HB^2$, d'où : $HB^2 = 25 - 4 = 21$.
   Finalement, HB étant un nombre positif (distance) : $HB = \sqrt{21}$.

$$\boxed{\text{La distance HB est égale à } \sqrt{21}.}$$

3. *Données*
   ABD est un triangle rectangle en B.

   Propriété
   Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

   Conclusion

$$\widehat{BAD} + \widehat{BDA} = 90°$$

   D'où : $\widehat{DAB} = \widehat{BAD} = 90° - \widehat{BDA} = 90° - \widehat{BDH}$.

   Données
   HBD est un triangle rectangle en B.

   Propriété
   Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

   Conclusion

$$\widehat{HBD} + \widehat{HDB} = 90°$$

   D'où : $\widehat{HBD} = 90° - \widehat{HDB} = 90° - \widehat{BDH}$.

   Comme on a : $\widehat{DAB} = 90° - \widehat{BDH}$ et $\widehat{HBD} = 90° - \widehat{BDH}$, on en conclut immédiatement :

$$\boxed{\widehat{DAB} = \widehat{HBD}}$$

4. *Données*
   HAB est un triangle rectangle en H.
   $AB = 2$ et $AH = 2$.

   Définition
   Cosinus d’un angle aigu dans un triangle rectangle.

   Conclusion

$$\cos \widehat{DAB} = \cos \widehat{HAB} = \frac{AH}{AB} = \frac{2}{5}$$

   Données
   HBD est un triangle rectangle en H.
   $HB = \sqrt{21}$.

   Définition
   Cosinus d’un angle aigu dans un triangle rectangle.

   Conclusion

$$\cos \widehat{HBD} = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{21}}{BD}$$

   Comme $\widehat{DAB} = \widehat{HBD}$, on a : $\cos \widehat{DAB} = \cos \widehat{HBD}$, soit :

$$\frac{2}{5} = \frac{\sqrt{21}}{BD}$$

   Le produit en croix donne alors : $2 \times BD = 5 \times \sqrt{21}$. D’où : $BD = \frac{5 \times \sqrt{21}}{2} = \frac{5}{2} \times \sqrt{21}$.

$$\boxed{BD = \frac{5}{2} \times \sqrt{21}}$$

5. On connaît AB et on vient de calculer BD …

   Données
   Le triangle ABD est rectangle en B.
   $AB = 5$ et $BD = \frac{5}{2} \times \sqrt{21}$.

   Propriété
   Théorème de Pythagore.

   Conclusion

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AD}^2 &= 5^2+\left(\frac{5}{2}\times\sqrt{21}\right)^2 = 25+\frac{5}{2}\times\sqrt{21}\times\frac{5}{2}\times\sqrt{21}\\
&= 25+\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\times\sqrt{21}\times\sqrt{21} = 25+\frac{5\times 5}{2\times 2}\times 21\\
&= 25+\frac{5\times 5}{2\times 2}\times 21 = 25+\frac{25}{4}\times 21\\
&= 25+25\times\frac{21}{4} = 25\times\left(1+\frac{21}{4}\right)\\
&= 25\times\frac{25}{4} = \frac{25\times 25}{2\times 2} = \frac{25^2}{2^2}\\
&= \left(\frac{25}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

On en tire immédiatement :

$$\boxed{\mathrm{AD} = \frac{25}{2}}$$

6. Notons $\mathscr{A}\left(\mathrm{ABCD}\right)$ l'aire cherchée. $\left[\mathrm{BH}\right]$ étant la hauteur issue de B, on a immédiatement :

$$\mathscr{A}\left(\mathrm{ABCD}\right) = \mathrm{BH}\times\mathrm{AD} = \sqrt{21}\times\frac{25}{2} = \frac{25\times\sqrt{21}}{2}$$

On a également : $\mathscr{A}\left(\mathrm{ABCD}\right) = \mathscr{A}\left(\mathrm{ABD}\right)+\mathscr{A}\left(\mathrm{BCD}\right)$.
Or, les triangles ABD et BCD sont isométriques et rectangles. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\left(\mathrm{ABCD}\right) &= \mathscr{A}\left(\mathrm{ABD}\right)+\mathscr{A}\left(\mathrm{BCD}\right)\\
&= 2\times\mathscr{A}\left(\mathrm{ABD}\right)\\
&= 2\times\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{BD}}{2}\\
&= \mathrm{AB}\times\mathrm{BD}
\end{aligned}$$

On a (énoncé) : $\mathrm{AB}=5$ et à la question 4, on a obtenu : $\mathrm{BD}=\frac{5}{2}\times\sqrt{21}$. Il vient donc :

$$\mathscr{A}\left(\mathrm{ABCD}\right) = \mathrm{AB}\times\mathrm{BD} = 5\times\mathrm{BD} = 5\times\frac{5}{2}\times\sqrt{21} = \frac{5\times 5\times\sqrt{21}}{2} = \frac{25\times\sqrt{21}}{2}$$

$$\boxed{\text{L'aire du parallélogramme ABCD est égale à } \frac{25\times\sqrt{21}}{2}.}$$