Théorème de Pythagore

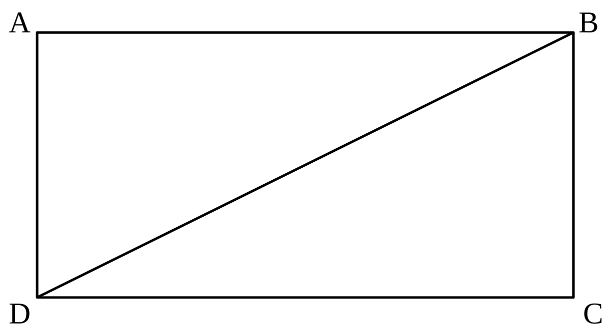
Corrigés d'exercices / Version de novembre 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 186 :	N°**8**, **12**	Page 190 :	N°**53**
Page 187 :	N°**26**	Page 192 :	N°**63**
Page 188 :	N°**30**, **41**		

N°8 page 186

Nommons ABCD le rectangle considéré.



Comme ABCD est un rectangle, le triangle ABD est rectangle en A.

<u>Données</u>
ABD est un triangle rectangle en A.
$AB = 21,2$ et $AD = 15,9$.

<u>Propriété</u>
Théorème de Pythagore.

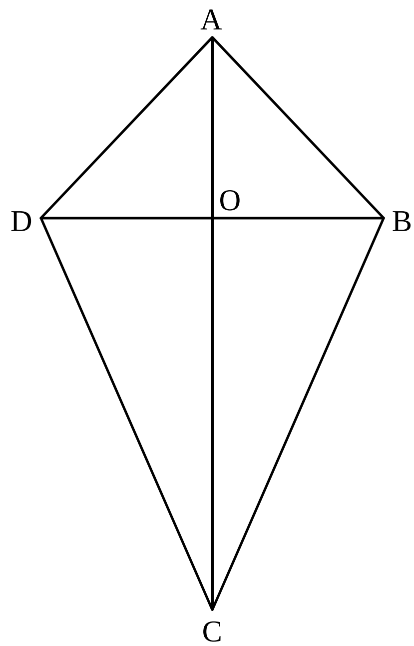
<u>Conclusion</u>
$BD^2 = AB^2 + AD^2$
Soit :

$$BD^2 = 21,2^2 + 15,9^2$$
$$BD^2 = 449,44 + 252,81$$
$$BD^2 = 702,25$$
$$BD = \sqrt{702,25}$$
$$BD = 26,5$$

La diagonale du rectangle mesure 26,5 cm.

N°12 page 186

1. Attention, la figure fournie ci-dessous n'est pas à l'échelle.



2. Avant toute chose, rappelons que les diagonales d'un cerf-volant se coupent perpendiculairement. Ainsi, dans la figure ci-dessus, les quatre triangles OAB, OBC, OCD et ODA sont rectangles en O.

   Rappelons également que le point O est le milieu de la petite diagonale [DB] (on a donc $OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$). Les triangles ADB et CDB sont dont isocèles respectivement en A et en C.

   Nous allons donc calculer les longueurs AB et BC en considérant respectivement les triangles OAB et OBC.

<u>Données</u>
Le triangle OAB est rectangle en O.
$OA = 3$ et $OB = \frac{5}{2}$

<u>Propriété</u>
Théorème de Pythagore.

Conclusion
$AB^2 = AO^2 + OB^2$
Soit :

$$AB^2 = 3^2 + 2,5^2$$
$$AB^2 = 9 + 6,25$$
$$AB^2 = 15,25$$
$$AB = \sqrt{15,25}$$
$$AB \simeq 3,9$$

La longueur AB est égale à $\sqrt{15,25}$ cm soit environ 3,9 cm (valeur arrondie au mm).

Le point O appartient au segment $[AC]$. On a donc $AC = AO + OC$.
Or, $AC = 8\text{ cm}$ et $AO = 3\text{ cm}$. On a donc : $8 = 3 + OC$, soit : $OC = 8 - 3 = 5$.

Données
Le triangle OBC est rectangle en O.
$OB = \dfrac{5}{2}$ et $OC = 5$.

Propriété
Théorème de Pythagore.

Conclusion
$BC^2 = BO^2 + OC^2$
Soit :

$$BC^2 = 2,5^2 + 5^2$$
$$BC^2 = 6,25 + 25$$
$$BC^2 = 31,25$$
$$BC = \sqrt{31,25}$$
$$AB \simeq 5,6$$

La longueur BC est égale à $\sqrt{31,25}$ cm soit environ 5,6 cm (valeur arrondie au mm).

N°26 page 187

La frontière du jardin de Monsieur Hoarau est un trapèze rectangle. Dans cet exercice, il convient d'en calculer le périmètre. Nous le notons *p*.

On a : $p = AB + BC + CD + DA$.

Comme on a : $AB = 15$, $CD = 25$ et $AD = 20$, il vient : $p = 15 + BC + 25 + 20$, soit :

$$p = 60 + BC$$

Monsieur Hoarau a acheté 80 mètres de grillage.
On a donc deux situations envisageables :

- Soit la longueur BC est inférieure ou égale à 20 mètres et les 80 mètres de grillage achetés suffiront.
- Soit la longueur BC est strictement supérieure à 20 mètres et les 80 mètres de grillage achetés ne suffiront pas.

La longueur BC n'est pas précisée sur la figure.
Une première approche consiste à la déterminer.

Le point H appartient au segment $[DC]$. L'angle $\widehat{DHC}$ est donc plat.

Or, les angles $\widehat{DHB}$ et $\widehat{BHC}$ sont adjacents et l'angle $\widehat{DHB}$ est droit.

On en conclut que l'angle $\widehat{BHC}$ est également droit.
Le triangle BHC est donc rectangle en H.

<u>Données</u>
Le quadrilatère ABHD comporte quatre angles droits.

<u>Définition</u>
Un quadrilatère qui comporte quatre angles droits est un rectangle.

<u>Conclusion</u>
Le quadrilatère ABHD est un rectangle.

<u>Données</u>
Le quadrilatère ABHD est un rectangle (et donc un parallélogramme).
$AB = 15$ et $AD = 20$.

<u>Propriété</u>
Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.

<u>Conclusion</u>
$AB = DH = 15$ et $AD = BH = 20$.

Le point H appartient au segment $[DC]$.

On a donc : $DC = DH + HC$.
Comme $DC = 25$ et $DH = 15$, il vient : $25 = 15 + HC$, soit : $HC = 25 - 15 = 10$.

<u>Données</u>
Le triangle BHC est rectangle en H.
$BH = 20$ et $HC = 10$.

<u>Propriété</u>
Théorème de Pythagore.

<u>Conclusion</u>
$BC^2 = BH^2 + HC^2$
Soit :

$$BC^2 = 20^2 + 10^2$$
$$BC^2 = 400 + 100$$
$$BC^2 = 500$$
$$BC = \sqrt{500}$$
$$BC \simeq 22{,}36$$

La longueur BC étant strictement supérieure à 20, les 80 mètres de grillage achetés seront donc insuffisant pour clôturer le jardin.

On pouvait cependant s'affranchir du calcul de BC.
En effet, dans le triangle BHC rectangle en H, on a $BH = 20$.
Or, dans un triangle rectangle l'hypoténuse est le plus grand côté. On a donc immédiatement : $BC > BH$, soit : $BC > 20$.
On conclut alors comme précédemment sans avoir eu à calculer BC …

Les 80 mètres de grillage achetés seront insuffisant pour clôturer le jardin.

N°30 page 188

<u>Triangle ABC</u>

Le côté le plus long est [BC].
On compare donc : BC^2 et $AB^2 + AC^2$:
$BC^2 = 15{,}2^2 = 231{,}04$ et $AB^2 + AC^2 = 13^2 + 7{,}9^2 = 231{,}41$.
Comme BC^2 n'est pas égal à $AB^2 + AC^2$ on en déduit, d'après le **théorème de Pythagore** (2ème formulation) que le triangle <u>ABC n'est pas rectangle</u>.

<u>Triangle EDF</u>

Le côté le plus long est [EF].
On compare donc : EF^2 et $ED^2 + DF^2$:
$EF^2 = 2^2 = 4$ et $ED^2 + DF^2 = 1{,}5^2 + 0{,}5^2 = 2{,}25 + 0{,}25 = 2{,}5$.
Comme EF^2 n'est pas égal à $ED^2 + DF^2$ on en déduit, d'après le **théorème de Pythagore** (2ème formulation) que le triangle <u>EDF n'est pas rectangle</u>.

<u>Triangle HIJ</u>

Le côté le plus long est [HI].
On compare donc : HI^2 et $\mathrm{HJ}^2+\mathrm{JI}^2$:
$\mathrm{HI}^2=6,6^2=43,56$ et $\mathrm{HJ}^2+\mathrm{JI}^2=3,96^2+5,28^2=15,681\,6+27,878\,4=43,56$.
Comme HI^2 est égal à $\mathrm{HJ}^2+\mathrm{JI}^2$ on en déduit, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore** que le triangle <u>HIJ est rectangle</u>.
Son hypoténuse étant [HI], il est rectangle en J.

<u>Triangle KLM</u>

Le côté le plus long est [KL].
On compare donc : KL^2 et $\mathrm{KM}^2+\mathrm{ML}^2$:
$\mathrm{KL}^2=14,2^2=201,64$ et $\mathrm{KM}^2+\mathrm{ML}^2=8,52^2+11,36^2=72,590\,4+129,049\,6=201,64$.
Comme KL^2 est égal à $\mathrm{KM}^2+\mathrm{ML}^2$ on en déduit, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore** que le triangle <u>KLM est rectangle</u>.
Son hypoténuse étant [KL], il est rectangle en M.

N°41 page 188

Considérons, dans un premier temps, le triangle KMN.

Le côté le plus long est [KN].
On compare donc : KN^2 et $\mathrm{KM}^2+\mathrm{MN}^2$:
$\mathrm{KN}^2=15^2=225$ et $\mathrm{KM}^2+\mathrm{MN}^2=12^2+9^2=144+81=225$.
Comme KN^2 est égal à $\mathrm{KM}^2+\mathrm{MN}^2$ on en déduit, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore** que le triangle <u>KMN est rectangle</u>.
Son hypoténuse étant [KN], il est rectangle en M.
Ainsi, les droites (MN) et (MK) sont perpendiculaires.

Considérons, maintenant, le triangle KLM.

Le côté le plus long est [ML].
On compare donc : ML^2 et $\mathrm{MK}^2+\mathrm{KL}^2$:
$\mathrm{ML}^2=20^2=400$ et $\mathrm{MK}^2+\mathrm{KL}^2=12^2+16^2=144+256=400$.
Comme ML^2 est égal à $\mathrm{MK}^2+\mathrm{KL}^2$ on en déduit, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore** que le triangle <u>KLM est rectangle</u>.
Son hypoténuse étant [ML], il est rectangle en K.
Ainsi, les droites (KL) et (KM) sont perpendiculaires.

Données
$(MN) \perp (MK)$ et $(KL) \perp (KM)$.

Propriété
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles.

Conclusion
(MN) est parallèle à (KL).

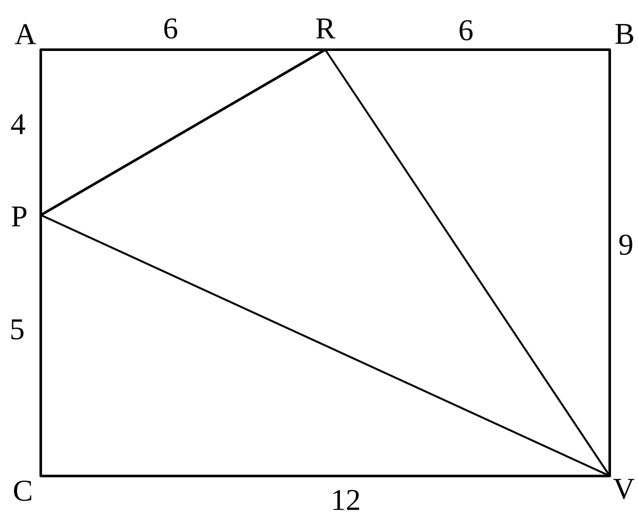
N°53 page 190

Le triangle PRV est inscrit dans un rectangle (cela signifie que chacun de ses trois sommets appartient à l'un des côtés de ce rectangle.

Nous allons donc compléter la figure (cf. ci-dessous) en nommant ABVC ce rectangle.

Par ailleurs, la figure est fournie sur une page comportant un quadrillage à base de grands carreaux et nous choisissons pour unité de mesure des longueurs la longueur d'un côté d'un tel carreau. Du fait du quadrillage, nous pouvons également affirmer que les triangles APR, BRV et CPV sont rectangles en A, B et C respectivement.

On obtient finalement la figure complétée suivante :



Grâce au théorème de Pythagore dans les triangles rectangles APR, BRV et CPV, nous allons pouvoir calculer : PR^2, RV^2 et PV^2. Nous détaillons la rédaction pour le triangle APR.

<u>Données</u>
Le triangle APR est rectangle en A.
$AP = 4$ et $AR = 6$.

<u>Propriété</u>
Théorème de Pythagore.

<u>Conclusion</u>
$PR^2 = AP^2 + AR^2$
Soit : $PR^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$.

De façon analogue, on a : $RV^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$ et $PV^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.

En définitive : $PR^2 = 52$, $RV^2 = 117$ et $PV^2 = 169$.

Dans le triangle PRV le plus grand côté est le côté [PV] car c'est celui dont le carré de la longueur est le plus grand (on peut indifféremment comparer les longueurs ou leurs carrés).
On va donc comparer : PV^2 et $PR^2 + RV^2$.
D'après ce qui précède, nous avons : $PV^2 = 169$ et $PR^2 + RV^2 = 52 + 117 = 169$.
Comme $PV^2 = PR^2 + RV^2$, nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle PRV est rectangle en R.

N°63 page 192

1. Nous commençons par nous intéresser au triangle BCD dont nous remarquons que les longueurs des côtés sont toutes multiples de 25 : $BC = 125 = 5 \times 25$, $CD = 75 = 3 \times 25$ et $DB = 100 = 4 \times 25$. Ainsi, les longueurs des côtés du triangle BCD sont proportionnelles à celles du triangle « 3-4-5 » dont nous savons (cf. le cours) qu'il est rectangle. Nous pouvons ainsi directement conclure que le triangle BCD est rectangle en D ([BC] étant le plus long côté, c'est son hypoténuse).
   Bien sûr, nous aurions pu adopter une approche plus classique et utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour obtenir ce résultat.

   Si nous notons $\mathscr{A}(BCD)$ l'aire du triangle BCD, nous avons directement :

   $$\mathscr{A}(BCD) = \frac{DB \times DC}{2} = \frac{100 \times 75}{2} = \frac{50 \times \cancel{2} \times 75}{\cancel{2}} = 50 \times 75 = 3750$$

   Le triangle ABD est rectangle en A. Si nous notons $\mathscr{A}(ABD)$ son aire, nous avons immédiatement : $\mathscr{A}(ABD) = \frac{AB \times AD}{2}$. La longueur AB est connue mais pas la longueur AD qu'il nous faut donc déterminer.

   Le triangle ABD est rectangle en A et on a : $AB = 80$ et $BD = 100$.
   D'après le théorème de Pythagore, on a : $BD^2 = AB^2 + AD^2$.

Soit : $100^2 = 80^2 + AD^2$. D'où : $AD^2 = 100^2 - 80^2 = 10\,000 - 6\,400 = 3\,600$.
Une longueur étant positive, il vient : $AD = \sqrt{3\,600} = 60$.
Finalement, le côté [AD] mesure 60 mètres.

On a donc :

$$\mathscr{A}\left(\mathrm{ABD}\right) = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}}{2} = \frac{80 \times 60}{2} = \frac{40 \times \cancel{2} \times 60}{\cancel{2}} = 40 \times 60 = 2\,400$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer l'aire $\mathscr{A}\left(\mathrm{ADE}\right)$ du triangle ADE.
Dans ce triangle, nous connaissons la longueur du côté [AD] et celle de la hauteur associée : $EH = 28{,}8$.
On a alors :

$$\mathscr{A}\left(\mathrm{ADE}\right) = \frac{\mathrm{EH} \times \mathrm{AD}}{2} = \frac{28{,}8 \times 60}{2} = \frac{28{,}8 \times 30 \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = 28{,}8 \times 30 = 864$$

Si nous notons $\mathscr{A}$ l'aire totale du verger de Clément, nous avons :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\mathrm{BCD}\right) + \mathscr{A}\left(\mathrm{ABD}\right) + \mathscr{A}\left(\mathrm{ADE}\right) = 3\,750 + 2\,400 + 864 = 7\,014$$

L'aire totale du verger de Clément est de 7 014 m².

2. Pour cette question, l'énoncé n'est pas particulièrement clair … Soit on se contente de considérer les segments [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA]. Soit on considère tous les segments apparaissant sur la figure.
Dans les deux cas, la seule longueur qui nous manque est : ED.

Le triangle ADE est rectangle en E et $EA = 36$ et $AD = 60$.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $AD^2 = EA^2 + ED^2$.
Soit $60^2 = 36^2 + ED^2$. D'où : $ED^2 = 60^2 - 36^2 = 3\,600 - 1\,296 = 2\,304$.
Une longueur étant positive, il vient : $ED = \sqrt{2\,306} = 48$.

En ne considérant que les segments [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA] et en notant $\mathscr{P}$ le périmètre du verger, il vient :

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EA} \\ &= 80 + 125 + 75 + 48 + 36 \\ &= 364\end{aligned}$$

Dans ce cas, la longueur de grillage nécessaire pour clôturer le verger de Clément est de 364 mètres.

En revanche, si on considère tous les segments de la figure, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= AB + BC + CD + DE + EA + BD + AD + EH \\ &= 80 + 125 + 75 + 48 + 36 + 100 + 160 + 28,8 \\ &= 364 + 100 + 160 + 28,8 \\ &= 364 + 288,8 \\ &= 652,8\end{aligned}$$

Dans ce cas, la longueur de grillage nécessaire pour clôturer le verger de Clément est de 652,8 mètres.