Liban – Juin 2010 – Série S – Exercice

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x)=x^2-2+\ln x$$

1. Etudier les variations de u sur $]0;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$.

On notera α cette solution.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0;2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0;+\infty[$.

1. Montrer que la distance *AM* est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions *f* et *g* ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.

b. Montrer que la distance *AM* est minimale en un point de Γ, noté *P*, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en *P* ?

Analyse

Une étude de fonctions assez complète visant finalement à résoudre un problème d'optimisation : minimiser la distance d'une point (le point A) à une courbe (ici la courbe représentative du logarithme népérien) avec, petite cerise sur le gâteau, un résultat (général) : au point de la courbe obtenu, la tangente et la droite passant par ce point et A sont perpendiculaires.

Résolution

Partie A

Question 1.

La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Il en va donc de même pour la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 2$.
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
La fonction u est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } u : x \mapsto x^2 - 2 + \ln x \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$$

Remarque : on aurait également pu calculer $u' : x \mapsto 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$ et montrer alors que la dérivée de u est strictement positive sur $]0;+\infty[$. Si cette méthode (étude du signe de la dérivée) est générale et souvent choisie (ou suggérée) par les élèves, il convient de ne pas oublier d'autres résultats généraux permettant de conclure !

On a facilement : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(x^2 - 2\right) = 0 - 2 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

D'où (somme) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} u(x) = -\infty$.

On a également : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

D'où (somme) : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} u(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty.}$$

Question 2.a.

La fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que fonction polynôme.
La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$.
La fonction u est donc continue sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Par ailleurs, d'après la question précédente :

- La fonction u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaire nous permet alors de conclure que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$.

L'équation $u(x)=0$ admet une solution unique, α, sur $]0;+\infty[$.

Question 2.b.

On a facilement :

$$u(1) = 1^2 - 2 + \ln 1 = 1 - 2 + 0 = -1 < 0 \text{ et } u(2) = 2^2 - 2 + \ln 2 = 4 - 2 + \ln 2 = 2 + \ln 2 > 0$$

On en tire : $1 < \alpha < 2$.

En tabulant alors u avec la calculatrice avec un pas de 0,1 on obtient :

$$u(1{,}3) \simeq -0{,}04764 < 0 \text{ et } u(1{,}4) \simeq 0{,}29647 > 0$$

On en tire : $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.

En tabulant alors u avec la calculatrice avec un pas de 0,01 on obtient :

$$u(1{,}31) \simeq -0{,}01387 < 0 \text{ et } u(1{,}32) \simeq 0{,}0200 > 0$$

On en tire : $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$.

$1{,}31 < \alpha < 1{,}32$

Question 3.

En tenant compte de la croissance stricte de u sur $]0;+\infty[$, on a :

$$x < \alpha \Leftrightarrow u(x) < u(\alpha) \Leftrightarrow u(x) < 0$$

On en conclut immédiatement :

- $u(x) < 0$ pour tout réel x strictement inférieur à α ;
- $u(\alpha) = 0$;
- $u(x) > 0$ pour tout réel x strictement supérieur à α.

Question 4.

On a :

$$u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

$$\boxed{\ln \alpha = 2 - \alpha^2}$$

Partie B

Question 1.

Pour tout x réel de $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 2x + 2 \times \left(-\frac{1}{x} \right) \times (2 - \ln x) = 2\left(x - \frac{2 - \ln x}{x} \right) = 2\frac{x^2 - 2 + \ln x}{x} = 2\frac{u(x)}{x}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel de }]0;+\infty[\ : \ f'(x) = 2\frac{u(x)}{x}.}$$

Question 2.

Comme x est strictement positif sur $]0;+\infty[$, le signe de $f'(x)$, est d'après la question précédente, celui de $u(x)$. D'après la question 3. de la partie A il vient alors :

- Si x appartient à $]-\infty;\alpha]$, f est strictement décroissante ;
- Si x appartient à $[\alpha;+\infty[$, f est strictement croissante.

Partie C

Question 1.

Le point M admet pour coordonnées $(x;\ln x)$ et on en tire : $\overrightarrow{AM}(x;\ln x - 2)$.

Le repère considéré étant orthonormé, on a :

$$AM^2 = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = x^2 + (\ln x - 2)^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$$

Finalement :

$$\boxed{AM = \sqrt{f(x)}}$$

Question 2.a.

La fonction g est la composée de la fonction f et de la fonction racine carrée. Cette dernière étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit immédiatement que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.

Les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0;+\infty[$.

Question 2.b.

D'après la question 2 de la partie B, la fonction f admet un minimum global unique en α sur $]0;+\infty[$. D'après la question précédente, il en ira de même pour la fonction g.

Graphiquement, cette valeur minimum est atteinte au point de Γ, noté P, d'abscisse α. Son ordonnée vaut : $\ln\alpha$. D'après la question 4 de la partie A, on a : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$. En définitive :

La distance AM est minimale pour le point $P(\alpha; 2-\alpha^2)$.

Question 2.c.

Comme on a $P(\alpha; 2-\alpha^2)$, il vient : $\overrightarrow{AP}(\alpha; -\alpha^2)$ et, en tenant compte de $\alpha > 0$:

$$AP = \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

$$\boxed{AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Question 3.

La dérivée de la fonction logarithme népérien étant la fonction inverse, la tangente à Γ au point $P(\alpha; 2-\alpha^2)$ admet pour vecteur directeur : $\vec{v}\left(1; \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Le repère considéré étant orthonormal, on a alors immédiatement :

$$\overrightarrow{AP}.\vec{v} = \alpha \times 1 + \left(-\alpha^2\right) \times \frac{1}{\alpha} = \alpha - \alpha = 0$$

On en déduit ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et, finalement, que :

La droite (AP) est perpendiculaire à la tangente à Γ en P.