Amérique du Nord – Juin 2010 – Série S – Exercice

A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont données en annexe.

Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.

2. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. **a.** Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point I_1.

c. Tracer la droite (T_1).

4. **a.** Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0;\ln 7]$.

Partie B : Etude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $\mathrm{A}\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.
On note I_n ce point d'intersection.

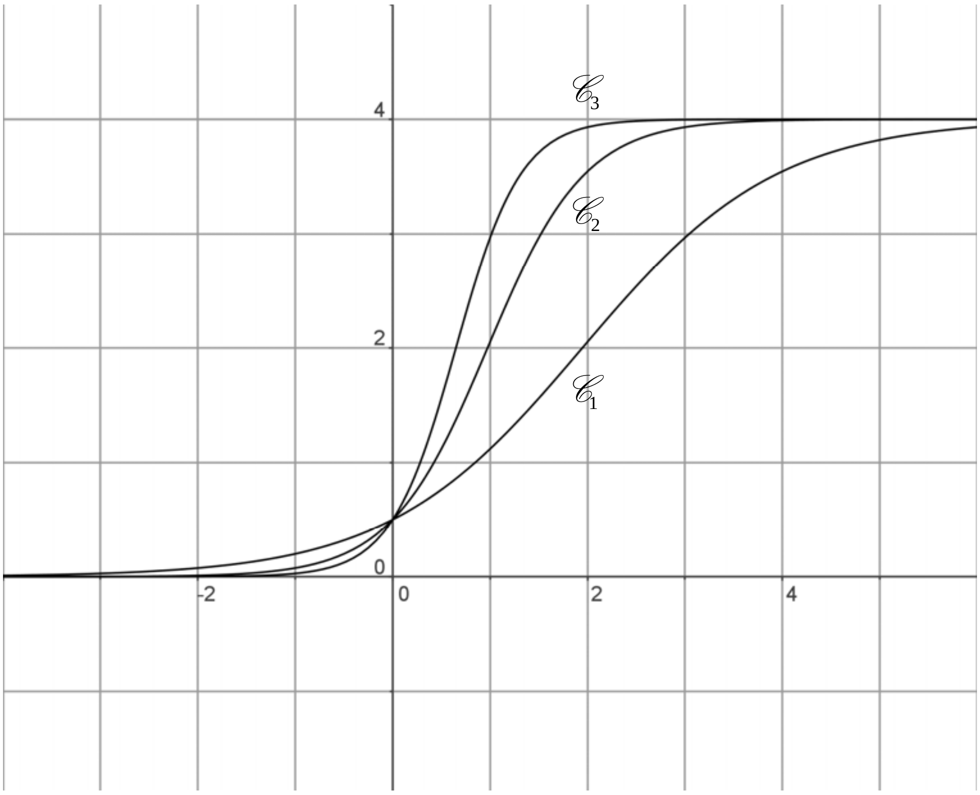
b. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point I_n.

c. Tracer les droites (T_2) et (T_3).

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$$

Montrer que la suite (u_n) est constante.



Analyse

Un exercice un peu … long, de nombreux thèmes d'analyse abordés (limites, primitives, valeur moyenne, suite), des éléments graphiques (asymptotes, centre de symétrie, tangentes, points d'intersection). Il n'en faudrait pas beaucoup plus pour voir réapparaître de véritables problèmes dans les sujets du baccalauréat ! On doit s'en réjouir même si, une fois encore, le niveau global de difficulté reste on ne peut plus raisonnable.

Résolution

Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\frac{4e^x}{e^x+7}$.

Question 1.

La fonction exponentielle ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout réel x :

$$f_1(x)=\frac{4e^x}{e^x+7}=\frac{4e^x}{e^x\left(1+\frac{7}{e^x}\right)}=\frac{4}{1+\frac{7}{e^x}}=\frac{4}{1+7e^{-x}}$$

Pour tout x réel : $f_1(x)=\frac{4}{1+7e^{-x}}$.

Question 2.a.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$. On en déduit alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+7e^{-x}\right)=+\infty$ puis en utilisant le résultat de la question précédente (rapport) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. On en déduit immédiatement que la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$. On en déduit alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+7e^{-x}\right)=1$ puis en utilisant le résultat de la question précédente (rapport) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$. On en déduit immédiatement que la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=4$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 admet, respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$, des asymptotes horizontales d'équations respectives : $y=0$ et $y=4$.

Question 2.b.

On peut procéder de diverses façons.

La fonction f_1 est (en utilisant l'expression obtenue à la question 1.), à une facteur multiplicatif près, l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a immédiatement, pour tout *x* réel :

$$f_1'(x) = 4\frac{-\left(7\times\left(-e^{-x}\right)\right)}{\left(1+7e^{-x}\right)^2} = \frac{28e^{-x}}{\left(1+7e^{-x}\right)^2}$$

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, on en déduit alors que l'on a $f_1'(x) > 0$ pour tout réel *x* puis que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut également décomposer la fonction f_1 comme suit :

$$\begin{array}{llllllll}
x & \mapsto & e^x & & & & & \\
 & & X & \mapsto & \dfrac{1}{X} & & & \\
 & & & & t & \mapsto & 1+7t & \\
 & & & & & & \theta & \mapsto \dfrac{4}{\theta}
\end{array}$$

Ainsi, la fonction f_1 est la composée de :

- Deux fonctions strictement croissantes (l'exponentielle et la fonction affine $t \mapsto 1+7t$) sur $\mathbb{R}$;
- Deux fonctions strictement décroissantes (la fonction inverse et la fonction $\theta \mapsto \dfrac{4}{\theta}$) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Question 2.c.

Pour tout *x* réel, on a : $7e^{-x} > 0$ et donc : $1+7e^{-x} > 1$.
On en déduit immédiatement :

- $\dfrac{4}{1+7e^{-x}} > 0$ comme rapport de deux réels strictement positifs ;
- $\dfrac{1}{1+7e^{-x}} < 1$ puis $\dfrac{4}{1+7e^{-x}} < 4$.

On a bien :

Pour tout réel x : $0<\dfrac{4}{1+7e^{-x}}<4$.

Question 3.a.

Rappelons que le point de coordonnées $(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f si on a :

- Pour tout x réel : $x+a$ appartient au domaine de définition de f si et seulement si $x-a$ appartient au domaine de définition de f ;
- Pour tout x réel : $\dfrac{1}{2}\left[f(a-x)+f(a+x)\right]=b$.

Ici, la fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ et la première condition est vérifiée (elle l'est d'ailleurs pour n'importe quelle valeur de a, pas seulement $\ln 7$).

Soit alors x un réel quelconque. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[f_1(\ln 7-x)+f_1(\ln 7+x)\right]&=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{1+7e^{-(\ln 7-x)}}+\frac{4}{1+7e^{-(\ln 7+x)}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1+7e^{-\ln 7}e^{x}}+\frac{1}{1+7e^{-\ln 7}e^{-x}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1+7\dfrac{1}{7}e^{x}}+\frac{1}{1+7\dfrac{1}{7}e^{-x}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\right)\\&=2\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

Le point $\mathrm{I}_1(\ln 7;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Question 3.b.

Une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point I_1 est donnée par :

$$y=f_1'(\ln 7)\times(x-\ln 7)+f_1(\ln 7)$$

Grâce à la question précédente, on a immédiatement : $f_1(\ln 7)=2$.

Par ailleurs, à la question 2.b. on avait calculé $f_1'(x)=\dfrac{28e^{-x}}{\left(1+7e^{-x}\right)^2}$, soit :

$$f_1'(x)=\frac{28e^{-x}}{\left(1+7e^{-x}\right)^2}=\frac{28e^{-x}}{16}\times\frac{16}{\left(1+7e^{-x}\right)^2}=\frac{7e^{-x}}{4}\times\left(\frac{4}{1+7e^{-x}}\right)^2=\frac{7e^{-x}}{4}\times\left(f_1(x)\right)^2$$

Il vient alors :

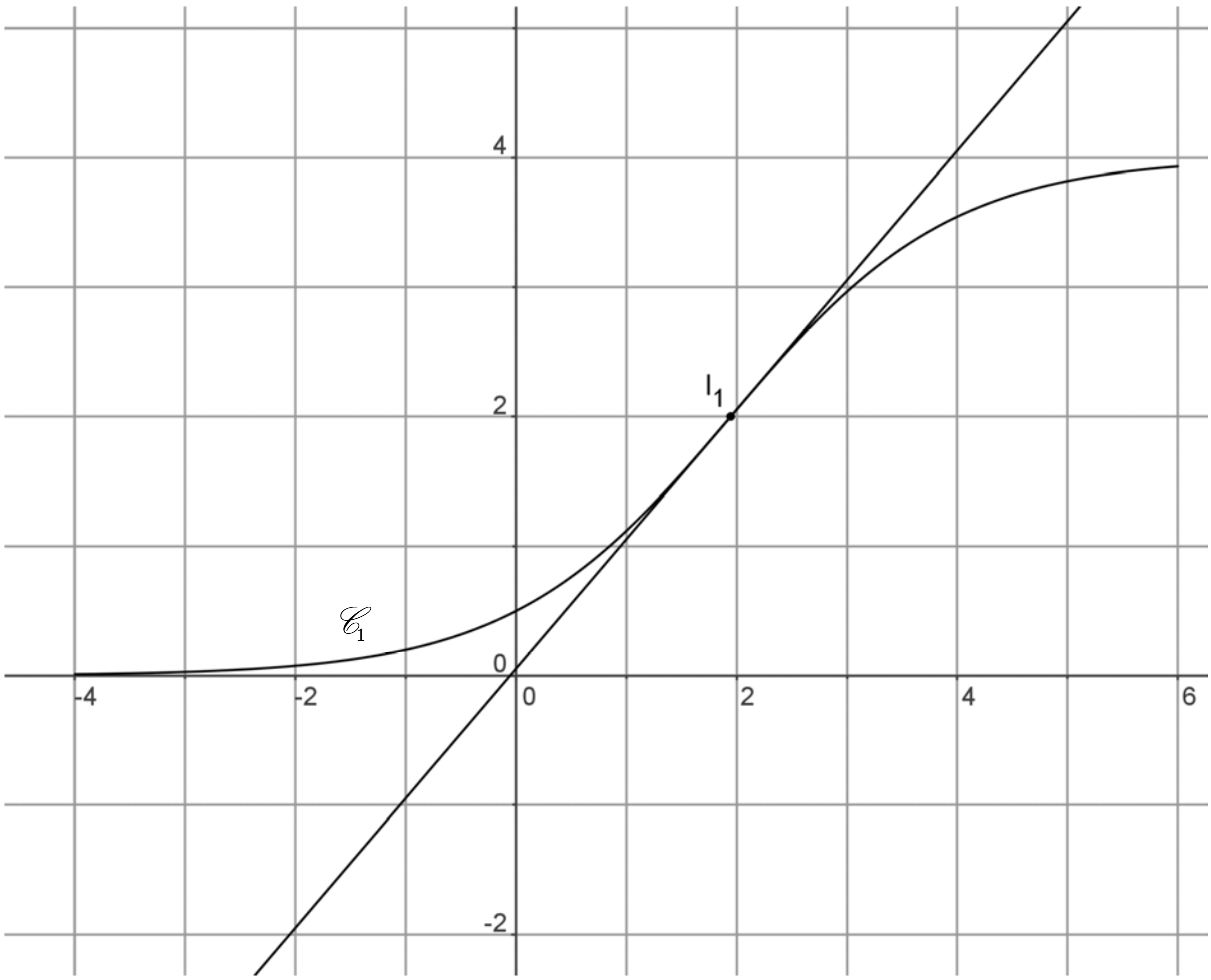
$$f_1'(\ln 7)=\frac{7e^{-\ln 7}}{\cancel{4}}\times\cancel{2^2}=7\times\frac{1}{7}=1$$

Finalement, l'équation s'écrit : $y=1\times(x-\ln 7)+2=x+2-\ln 7$.

$$\boxed{\text{Une équation de la tangente } (T_1) \text{ à la courbe } \mathscr{C}_1 \text{ au point } \mathrm{I}_1 \text{ est : } y=x+2-\ln 7.}$$

Question 3.c.

On obtient (nous avons supprimé $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ pour plus de lisibilité) :



Question 4.a.

Reprenons l'expression initiale de $f_1(x)$: $f_1(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+7}$.

En posant $u(x)=e^x+7$, il vient : $u'(x)=e^x$ puis : $f_1(x)=4\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

En tenant compte du fait que la fonction *u* prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement que la fonction : $x\mapsto 4\ln\left[u(x)\right]=4\ln\left(e^x+7\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x\mapsto 4\ln\left(e^x+7\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Question 4.b.

La valeur moyenne de la fonction f_1 est, par définition, le réel :

$$\frac{1}{\ln 7-0}\int_0^{\ln 7} f_1(x)\,dx=\frac{1}{\ln 7}\int_0^{\ln 7} f_1(x)\,dx$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 7}\int_0^{\ln 7} f_1(x)\,dx&=\frac{1}{\ln 7}\left[4\ln\left(e^x+7\right)\right]_0^{\ln 7}\\&=\frac{4}{\ln 7}\left[\ln\left(e^{\ln 7}+7\right)-\ln\left(e^0+7\right)\right]\\&=\frac{4}{\ln 7}\left[\ln 14-\ln 8\right]=\frac{4}{\ln 7}\ln\frac{14}{8}\\&=\frac{4}{\ln 7}\ln\frac{7}{4}=\frac{4}{\ln 7}\left[\ln 7-\ln 4\right]\\&=4\left(1-\frac{\ln 4}{\ln 7}\right)\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction f_1 sur l'intervalle $\left[0;\ln 7\right]$ est égale à $4\left(1-\dfrac{\ln 4}{\ln 7}\right)$.

Partie B : Etude de certaines propriétés de la fonction f_n.

Question 1.

Pour tout *n* entier naturel non nul, on a :

$$f_n(0)=\frac{4e^{n\times 0}}{e^{n\times 0}+7}=\frac{4e^0}{e^0+7}=\frac{4\times 1}{1+7}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

On en déduit bien :

Pour tout entier naturel n non nul, le point $\mathrm{A}\left(0;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

Question 2.a.

Un point $\mathrm{M}(x;y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$ et de la droite d'équation $y=2$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} y=2 \\ y=\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} \end{cases}$$

Ce système implique : $\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2 \\ \Leftrightarrow\ & 2e^{nx}=e^{nx}+7 \\ \Leftrightarrow\ & e^{nx}=7 \\ \Leftrightarrow\ & nx=\ln 7 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{\ln 7}{n} \end{aligned}$$

On en conclut que :

La courbe $\mathscr{C}_n$ et de la droite d'équation $y=2$ admettent pour unique point d'intersection le point : $\mathrm{I}_n\left(\frac{\ln 7}{n};2\right)$.

Remarque : pour $n=1$, on retrouve le point I_1 .

Question 2.a.

On procède comme à la question 3.b.

Une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point I_n est donnée par :

$$y=f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\times\left(x-\frac{\ln 7}{n}\right)+f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$$

Grâce à la question précédente, on a immédiatement $f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)=2$.

Par ailleurs, on a $f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=f_1(nx)$. On en tire (dérivation d'une composée) que pour tout x réel, on a : $f_n'(x)=n\times f_1'(nx)$.

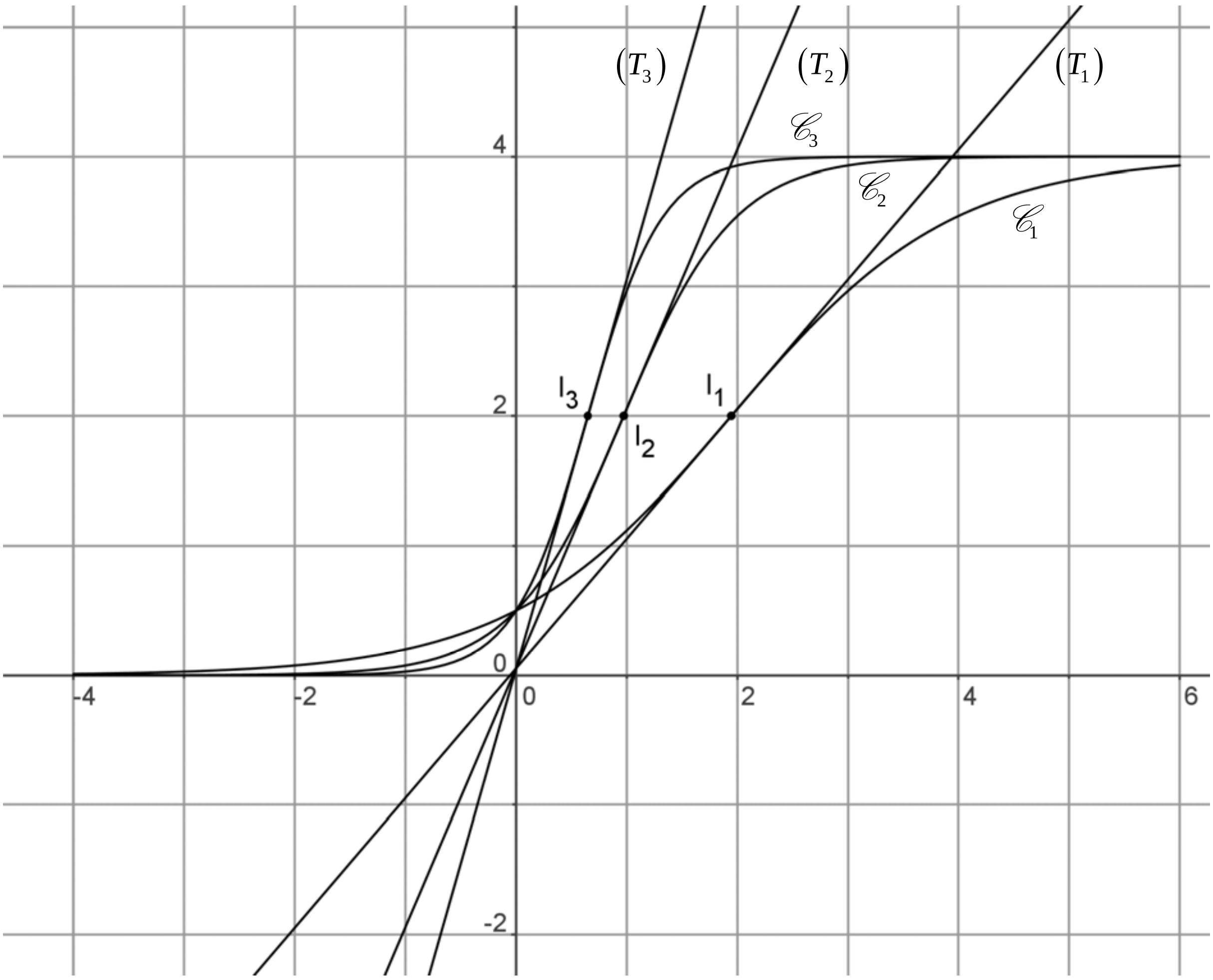
En particulier : $f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)=n\times f_1'\left(n\frac{\ln 7}{n}\right)=n\times f_1'(\ln 7)=n$.

Finalement, l'équation s'écrit : $y=n\times\left(x-\frac{\ln 7}{n}\right)+2=nx+2-\ln 7$.

Une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point I_n est : $y=nx+2-\ln 7$.

Question 2.b.

On obtient :



Question 3.

On a : $u_n=\dfrac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx=\dfrac{1}{\frac{\ln 7}{n}-0}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$.

Ainsi, u_n est la valeur moyenne de la fonction f_n sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\ln 7}{n}\right]$.

Posons $u(x)=e^{nx}+7$. Il vient : $u'(x)=ne^{nx}$ puis : $f_n(x)=\dfrac{4}{n}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

En tenant compte du fait que la fonction *u* prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement que la fonction : $x\mapsto\dfrac{4}{n}\ln\left[u(x)\right]=\dfrac{4}{n}\ln\left(e^{nx}+7\right)$ est une primitive de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
u_n&=\frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx\\
&=\frac{n}{\ln 7}\left[\frac{4}{n}\ln\left(e^{nx}+7\right)\right]_0^{\frac{\ln 7}{n}}\\
&=\frac{4}{\ln 7}\frac{4}{n}\left[\ln\left(e^{n\frac{\ln 7}{n}}+7\right)-\ln\left(e^{n\times 0}+7\right)\right]\\
&=\frac{4}{\ln 7}\left[\ln 14-\ln 8\right]\\
&=4\left(1-\frac{\ln 4}{\ln 7}\right)
\end{aligned}$$

Le résultat ne dépend pas de *n* et correspond à la valeur obtenue à la question 4.b. de la Partie A (cette valeur étant simplement u_1).

La suite (u_n) est constante et on a, pour tout entier naturel *n* non nul :

$$u_n=\frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx=4\left(1-\frac{\ln 4}{\ln 7}\right)$$