Nouvelle-Calédonie – Novembre 2009 – Série S – Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2e^{-x}$$

On note f' la fonction dérivée de *f*.

1. a. Déterminer les limites de la fonction *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de *f*.

c. En déduire le signe de *f* sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel *a*, on considère l'intégrale $I(a)=\int_0^a f(x)dx$.

a. Donner selon les valeurs de *a* le signe de $I(a)$.

b. A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel *a* :

$$I(a)=2-2e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)$$

c. En déduire pour tout nombre réel *a* :

$$\frac{1}{2}e^a I(a)=e^a-\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)$$

3. Soient *g* et *h* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x$ et $h(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *g* et $\mathscr{P}$ celle de *h*.

a. Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

Analyse

Une intégrale pour étudier la position relative de deux courbes … voilà qui n'est pas banal et donne lieu à divers calculs (étude de fonction, calcul intégral via une double intégration par parties, etc.). Si la double intégration par parties correspond à la question la plus « technique » du sujet, le reste est finalement très proche du cours.

Résolution

Question 1.a.

On a d'abord : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

En suite : comme $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, il vient : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

Par produit, on en déduit alors immédiatement : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$.

Comme : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, nous avons affaire, en $+\infty$, à une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

Par croissance comparée, on a immédiatement : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Question 1.b.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout *x* réel :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

Comme on a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du produit : $x(2-x)$ qui est un polynôme du second degré factorisé s'annulant en 0 et 2. On a donc :

- Pour tout *x* réel dans $]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$, on a $x(2-x)<0$ et donc $f'(x)>0$.
- Pour tout x réel dans $]0\,;2[$, on a $x(2-x)>0$ et donc $f'(x)<0$.
- Pour $x=0$ ou $x=2$, on a : $x(2-x) = f'(x) = 0$.

Par ailleurs : $f\left(0\right)=0^2\times e^{-0}=0$ et $f\left(2\right)=2^2\times e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$.

Les éléments précédents et les limites obtenues à la question 1.a. nous permettent de dresser le tableau de variations de la fonction *f* :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

Question 1.c.

On a : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ (et x^2 ne s'annule que pour $x=0$) et $e^{-x}>0$.
On en déduit immédiatement : $\forall x\in\mathbb{R},\ f\left(x\right)\geq 0$ (et $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$).
L'étude menée à la question précédente confirme ce résultat :

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right]$ la fonction *f* est strictement décroissante avec $f\left(0\right)=0$. On en déduit immédiatement : $\forall x\in\left]-\infty\,;0\right],\ f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0$.
- Sur l'intervalle $\left[0\,;2\right]$ la fonction *f* est strictement croissante avec $f\left(0\right)=0$. On en déduit immédiatement : $\forall x\in\left[0\,;2\right],\ f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0$.
- Sur l'intervalle $\left[2\,;+\infty\right[$, la fonction *f* est strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$. On en déduit cette fois : $\forall x\in\left[2\,;+\infty\right[,\ f\left(x\right)>0$ (raisonnement classique par l'absurde : s'il existait x_0 dans $\left]2\,;+\infty\right[$ avec $f\left(x_0\right)\leq 0$ alors, du fait de la décroissance <u>stricte</u> de *f*, il existerait $x_1>x_0$ tel que $f\left(x_1\right)<0$ et on aurait $\forall x\in\left]x_1\,;+\infty\right[,\ f\left(x\right)\leq f\left(x_1\right)<0$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)\leq f\left(x_1\right)<0$, ce qui contredit $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$).

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f\left(x\right)\geq 0 \text{ et } f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0.}$$

Question 2.a.

On a : $I(a)=\int_0^a f(x)dx$. Ainsi, la fonction *I* est la primitive de la fonction *f* s'annulant en 0.

Comme vu précédemment, la fonction *f* est positive sur $\mathbb{R}$. Le signe de $I(a)$ dépend donc de la comparaison des bornes de cette intégrale, c'est-à-dire des réels 0 et *a* :

- Si $a>0$, $I(a)$ est l'intégrale sur l'intervalle $[0\,;a]$ d'une fonction positive et on a, par définition : $I(a)\geq 0$.
- Si $a=0$: $I(0)=\int_0^0 f(x)dx=0$.
- Si $a<0$, $I(a)=\int_0^a f(x)dx=-\int_a^0 f(x)dx$. $\int_a^0 f(x)dx$ est l'intégrale sur l'intervalle $[a\,;0]$ d'une fonction positive et on a : $\int_a^0 f(x)dx\geq 0$ et donc : $I(a)\leq 0$.

- Si $a>0$, $I(a)\geq 0$.
- Si $a=0$: $I(a)=0$.
- Si $a<0$, $I(a)\leq 0$.

Question 2.b.

Soit *a* un réel quelconque fixé.

Soit *u* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2$. Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme et on a : $\forall x\in\mathbb{R}, u'(x)=2x$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
Soit la fonction $x\mapsto e^{-x}$, continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur cet intervalle. La fonction $x\mapsto -e^{-x}$ en est une primitive sur $\mathbb{R}$.

Les éléments précédents nous permettent de procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_0^a f(x)dx\\&=\int_0^a x^2e^{-x}dx=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^a-\int_0^a 2x\left(-e^{-x}\right)dx\\&=-\left[x^2e^{-x}\right]_0^a+2\int_0^a xe^{-x}dx=-a^2e^{-a}-\left(-0^2e^{-0}\right)+2\int_0^a xe^{-x}dx\\&=-a^2e^{-a}+2\int_0^a xe^{-x}dx\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^a xe^{-x}dx$ se calcule également en procédant à une intégration par parties mais en considérant cette fois pour la fonction *u* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$. Elle y est bien sûr dérivable de dérivée la fonction constante, donc continue sur $\mathbb{R}$, prenant la valeur 1.

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}\int_0^a x e^{-x}dx &= \left[-x e^{-x}\right]_0^a - \int_0^a 1\times\left(-e^{-x}\right)dx\\ &= -\left[x e^{-x}\right]_0^a + \int_0^a e^{-x}dx = -a e^{-a} - \left(-0e^{-0}\right) + \int_0^a e^{-x}dx\\ &= -a e^{-a} + \left[-e^{-x}\right]_0^a = -a e^{-a} - \left[e^{-x}\right]_0^a = -a e^{-a} - \left(e^{-a} - e^{-0}\right)\\ &= -a e^{-a} - e^{-a} + 1\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}I(a) &= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}dx\\ &= -a^2e^{-a} + 2\left(-a e^{-a} - e^{-a} + 1\right)\\ &= 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\, I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)}$$

Question 2.c.

A partir du résultat de la question précédente, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}&\forall a \in \mathbb{R},\, I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\forall a \in \mathbb{R},\, \frac{1}{2}I(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\forall a \in \mathbb{R},\, \frac{1}{2}e^aI(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\, \frac{1}{2}e^aI(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)}$$

Question 3.a.

Soulignons d'abord que les fonctions *g* et *h* sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (fonction exponentielle et fonction polynôme). On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x$ et $f'(x) = 0 + 1 + \frac{2x}{2} = 1 + x$.

On a : $g(0) = e^0 = 1$ et $h(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2} = 1$.
On en déduit immédiatement que les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, des fonctions *g* et *h* respectivement, passent par le point $(0;1)$.

Par ailleurs : $g'(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = 1 + 0 = 1$.
Ainsi, les tangentes aux courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ au point $(0;1)$ admettent le même coefficient directeur. On en déduit qu'elle sont confondues.

Les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$
admettent une tangente commune au point d'abscisse 0.

Question 3.b.

A la question 2.c. nous avons obtenu : $\forall a \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right) = g(a) - h(a)$.

Comme $\forall a \in \mathbb{R}, e^a > 0$, le signe de la différence $g(a) - h(a)$ est identique à celui de $I(a)$.
Or à la question 2.a. nous avons obtenu :

- Si $a > 0$, $I(a) \geq 0$.
- Si $a = 0$: $I(a) = 0$.
- Si $a < 0$, $I(a) \leq 0$.

On en déduit immédiatement :

- Si $a > 0$, $I(a) \geq 0$, donc $g(a) - h(a) \geq 0$ et la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{P}$.
- Si $a = 0$: $I(a) = 0$, soit $g(a) - h(a) = 0$ et les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ se coupent (plus précisément, d'après la question précédente, elles sont tangentes l'une à l'autre).
- Si $a < 0$, $I(a) \leq 0$, donc $g(a) - h(a) \leq 0$ et la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la courbe $\mathscr{P}$.

- Si $a > 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est située **au-dessus** de la courbe $\mathscr{P}$.
- Si $a = 0$: les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ se coupent en étant tangentes l'une à l'autre.
- Si $a < 0$: la courbe $\mathscr{C}$ est située **en dessous** de la courbe $\mathscr{P}$.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives des fonctions g et h ainsi que la tangente en $(0\,;1)$.