Centres étrangers – Série ES – Juin 1999 - Exercice

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x}=e^x-\frac{e^x}{1+e^x}\text{, puis }\frac{e^{3x}}{1+e^x}=e^{2x}-\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

2. En déduire le calcul des deux intégrales :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx\text{, puis }\mathrm{J}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}}{1+e^x}dx\,.$$

Analyse

Du calcul intégral (donc du calcul de primitives) et des exponentielles … voici les principaux ingrédients de cet exercice.

Résolution

→ Question 1.

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} e^x - \frac{e^x}{1+e^x} &= \frac{e^x\left(1+e^x\right)}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^x + e^x \times e^x - e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{2x}}{1+e^x} \end{aligned}$$

On a bien :

Pour tout x réel, $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

De façon analogue, on a, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} e^{2x} - \frac{e^{2x}}{1+e^x} &= \frac{e^{2x}\left(1+e^x\right)}{1+e^x} - \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{2x} \times e^x - e^{2x}}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{3x} - e^{2x}}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{3x}}{1+e^x} \end{aligned}$$

On a bien :

Pour tout x réel, $\frac{e^{3x}}{1+e^x} = e^{2x} - \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.

→ Question 2.

A partir du premier résultat obtenu à la question 1, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx &= \int_0^{\ln 2}\left(e^x-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx\\ &= \int_0^{\ln 2}e^x dx-\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx\end{aligned}$$

$\frac{e^x}{1+e^x}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=1+e^x$ et $u(x)>0$ pour tout x réel..

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx &= \left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^{\ln 2}\\ &= \ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-\ln\left(1+e^0\right)\\ &= \ln(1+2)-\ln(1+1)\\ &= \ln 3-\ln 2\\ &= \ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx &= \int_0^{\ln 2}e^x dx-\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx\\ &= \left[e^x\right]_0^{\ln 2}-\ln\frac{3}{2}\\ &= e^{\ln 2}-e^0-\ln\frac{3}{2}\\ &= 2-1-\ln\frac{3}{2}\\ &= 1-\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{I=1-\ln\frac{3}{2}}}$$

A partir du deuxième résultat obtenu à la question 1, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{1+e^x}dx &= \int_0^{\ln 2}\left(e^{2x}-\frac{e^{2x}}{1+e^x}\right)dx\\ &= \int_0^{\ln 2} e^{2x}dx - \int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx\\ &= \int_0^{\ln 2} e^{2x}dx - \mathrm{I}\end{aligned}$$

Or : $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\times 0} = \frac{1}{2}e^{\ln 4}-\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{1+e^x}dx &= \int_0^{\ln 2} e^{2x}dx - \mathrm{I}\\ &= \frac{3}{2}-\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{I = \frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}}}$$