Centres étrangers II – Juin 1994 – Série ES – Exercice

1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x-3y=2\ln 2 \\ x+y=4\ln 2 \end{cases}$$

2. On pose $\mathrm{I}=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $\mathrm{J}=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$.

   Calculer $\mathrm{I}-3\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}+\mathrm{J}$. En déduire les valeurs exactes de I et J.

Analyse

Du calcul intégral (donc du calcul de primitives), des exponentielles et quelques manipulations du logarithme népérien… voici les principaux ingrédients de cet exercice.

Résolution

→ *Question 1.*

Le système proposé se résout facilement par substitution :

$$\begin{cases} x-3y=2\ln 2 \\ x+y=4\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2\ln 2 \\ x+y=4\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2\ln 2 \\ 3y+2\ln 2+y=4\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2\ln 2 \\ 4y=2\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+2\ln 2 \\ y=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\times\frac{1}{2}\ln 2+2\ln 2 \\ y=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2}\ln 2 \\ y=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

Finalement :

Le système proposé admet un unique couple solution : $\left(\frac{7}{2}\ln 2;\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

→ *Question 2.*

Les bornes des deux intégrales proposées étant identiques, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}-3\mathrm{J} &= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx - 3\int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}dx \\
&= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx + \int_0^{\ln 16} \frac{-3}{e^x+4}dx \\
&= \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} + \frac{-3}{e^x+4}\right)dx \\
&= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x+4}dx \\
&= \left[\ln\left(e^x+4\right)\right]_0^{\ln 16} \\
&= \ln\left(e^{\ln 16}+4\right) - \ln\left(e^0+4\right) \\
&= \ln\left(16+4\right) - \ln\left(1+4\right) \\
&= \ln 20 - \ln 5 \\
&= \ln\frac{20}{5} \\
&= \ln 4 \\
&= 2\ln 2
\end{aligned}$$

De façon analogue :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}+\mathrm{J} &= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx + \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}dx \\
&= \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} + \frac{1}{e^x+4}\right)dx \\
&= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+4}{e^x+4}dx \\
&= \int_0^{\ln 16} dx \\
&= \left[x\right]_0^{\ln 16} \\
&= \ln 16 - 0 \\
&= \ln 16 \\
&= 4\ln 2
\end{aligned}$$

Les intégrales I et J vérifient donc les deux égalités :

$$\begin{cases} \mathrm{I}-3\mathrm{J} = 2\ln 2 \\ \mathrm{I}+\mathrm{J} = 4\ln 2 \end{cases}$$

En d'autres termes, les intégrales I et J sont les solutions du système résolu à la question 1.

Il vient donc : $\mathrm{I} = \frac{7}{2}\ln 2$ et $\mathrm{J} = \frac{1}{2}\ln 2$.

$$\boxed{\mathbf{I} = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\,dx = \frac{7}{2}\ln 2 \ \text{ et } \ \mathbf{J} = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2}$$