Bordeaux – Juin 1986 – Série C – Exercice

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ g(x)=-\frac{x}{2}+1 \text{ et } h(x)=-\frac{x^2}{2}+1$$

1. Etablir que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[0;1\right]$:

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Analyse

En terminale, les élèves ne connaissent pas de primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On ne peut donc pas calculer une intégrale comme $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ à l'aide de la formule du cours.

Indépendamment de la valeur exacte, cet exercice vous propose d'obtenir un encadrement de cette valeur en encadrant la fonction *f* par deux polynômes simples sur l'intervalle $[0;1]$.

A la première question, on doit essentiellement manipuler des fonctions rationnelles et étudier leur signe.
A la seconde, on procède, stricto sensu, au calcul de deux intégrales simples.

Résolution

→ *Question 1.*

Dans cette première question, il convient en fait d'établir deux inégalités.
Commençons par montrer que pour tout *x* de l'intervalle $[0;1]$, on a : $g(x) \leq f(x)$.

Pour ce faire, nous allons introduire la fonction φ définie sur $[0;1]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{2} - 1$$

En réduisant au même dénominateur il vient :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{2(1+x^2)} + \frac{x(1+x^2)}{2(1+x^2)} - \frac{2(1+x^2)}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{\cancel{2} + x + x^3 \cancel{-2} - 2x^2}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}\end{aligned}$$

Le signe de l'expression obtenue peut être facilement déterminé :

- x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, il est positif. Il en va donc de même pour le numérateur de l'expression ci-dessus (produit de x par un carré) ;
- Pour tout x réel, la quantité $1+x^2$ est positive. Il en va donc de même pour le dénominateur de φ.

Finalement, pour tout x de l'intervalle $[0;1]$ on a $\varphi(x)\geq 0$. C'est à dire $f(x)\geq g(x)$.

Pour établir la seconde inégalité, nous procédons de façon analogue.
Nous introduisons cette fois la fonction Φ définie sur $[0;1]$ par :

$$\Phi(x)=h(x)-f(x)=-\frac{x^2}{2}+1-\frac{1}{1+x^2}$$

On en tire :

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=-\frac{x^2}{2}+1-\frac{1}{1+x^2}\\&=\frac{-x^2\left(1+x^2\right)+2\left(1+x^2\right)-2}{2\left(1+x^2\right)}\\&=\frac{-x^2-x^4+\cancel{2}+2x^2\cancel{-2}}{2\left(1+x^2\right)}\\&=\frac{-x^4+x^2}{2\left(1+x^2\right)}\\&=\frac{x^2\left(-x^2+1\right)}{2\left(1+x^2\right)}\\&=\frac{x^2(1+x)(1-x)}{2\left(1+x^2\right)}\end{aligned}$$

Comme précédemment, l'étude du signe de Φ revient à celle de son numérateur que nous avons pu factoriser.

Pour x appartenant à $[0;1]$ on a : $1+x\geq 1>0$ et $1-x\geq 0$. Le troisième facteur étant un carré, on en déduit finalement que le numérateur est positif.

Finalement, pour tout x de $[0;1]$ on a $\Phi(x)\geq 0$. C'est à dire : $h(x)\geq f(x)$.

Les deux inégalités que nous venons d'établir nous permettent de conclure :

Pour tout x de $[0;1]$ on a : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

→ *Question 2.*

La double inégalité précédente nous permet d'écrire directement :

$$\int_0^1 g(x)\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 h(x)\,dx$$

On a alors :

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{x}{2}+1\right)dx = \left[-\frac{x^2}{4}+x\right]_0^1 = -\frac{1}{4}+1-(-0+0) = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Et

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2}+1\right)dx = \left[-\frac{x^3}{6}+x\right]_0^1 = -\frac{1}{6}+1-(-0+0) = \boxed{\frac{5}{6}}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\frac{3}{4} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{5}{6}}$$