Pondichéry – Avril 2005 - Exercice

Partie 1

Soit les fonctions f et g définies sur $[0;9]$ par $f(x)=\dfrac{10}{1+x}-1$ et $g(x)=\dfrac{x}{2}$.

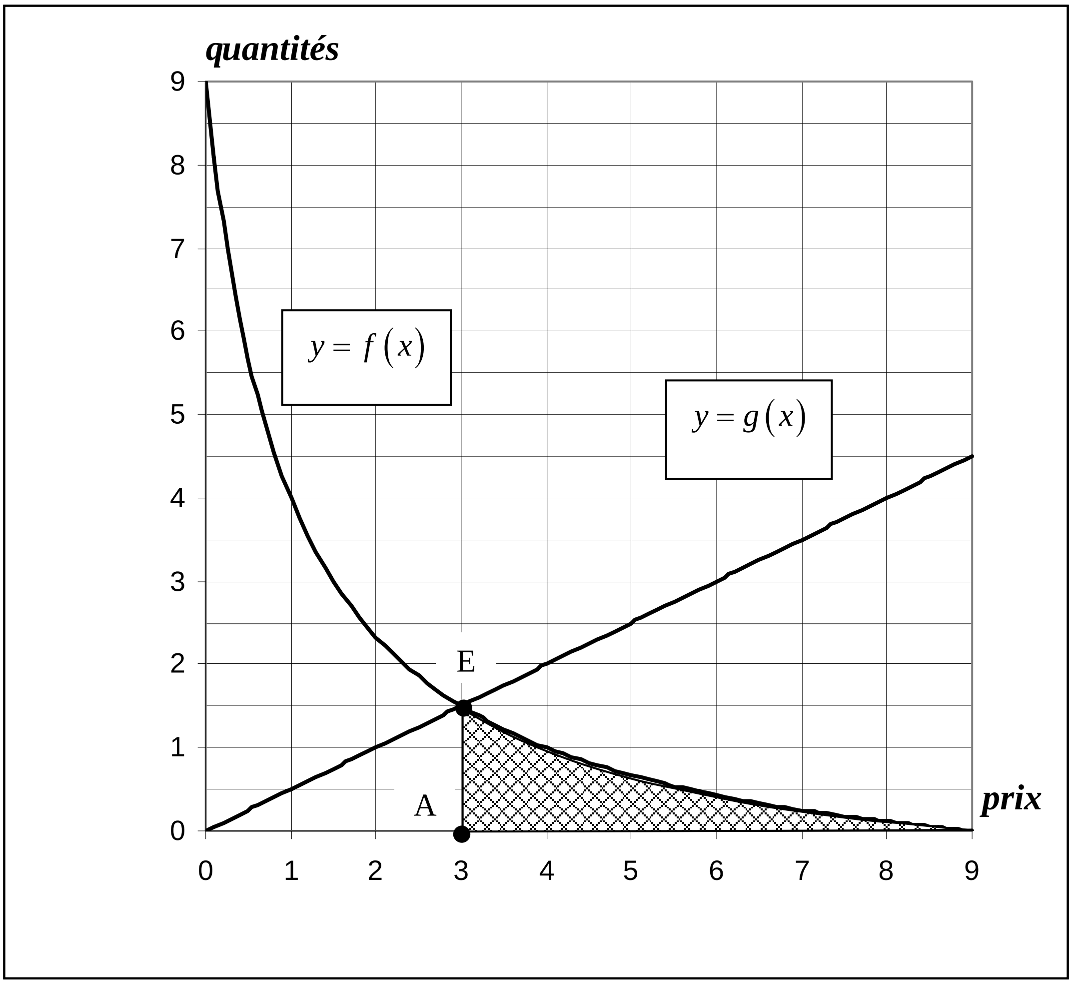
1. Résoudre algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$.
2. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I}=\displaystyle\int_3^9 f(x)dx$; on donnera la valeur exacte de I.

Partie 2

Un produit conditionné en boîte est mis sur le marché.
On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.

On admet que la quantité proposée sur la marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$.

Sur le graphique ci-dessous, sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.



1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
    a. Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boîte ?
    b. Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre. Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.

2. a. D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre.
   On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en millier d'euros par l'aire du triangle OAE (1 unité d'aire = 1 millier d'euros).
   Calculer ce surplus en euros.

   b. Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leq x \leq 9$).
   Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

Analyse

Un exercice d'application des mathématiques à l'économie (courbes d'offre et de demande, équilibre du marché, calcul de surplus …).

Résolution

Partie 1.

→ *Question 1.*

On cherche à résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ sur l'intervalle $[0;9]$.
Sur cet intervalle, on a : $1+x\neq 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{10}{1+x}-1=\frac{x}{2}\\
&\Leftrightarrow 10-(1+x)=\frac{x}{2}\times(1+x)\Leftrightarrow 9-x=\frac{x(1+x)}{2}\\
&\Leftrightarrow 18-2x=x+x^2 \Leftrightarrow x^2+3x-18=0
\end{aligned}$$

On résout d'abord cette équation sur $\mathbb{R}$.
Le discriminant de l'équation $x^2+3x-18=0$ est égal à 81 et on en tire immédiatement les deux solutions : $\frac{-3-9}{2}=-6$ et $\frac{-3+9}{2}=3$.
Seule la valeur 3 appartient à l'intervalle $[0;9]$.

L'équation $f(x)=g(x)$ admet comme unique solution la valeur 3.

→ *Question 2.*

Sur l'intervalle $[0;9]$, la fonction *f* peut s'écrire : $f(x)=10\frac{u'(x)}{u(x)}-1$ avec $u(x)=1+x$.

Pour tout *x* de l'intervalle $[0;9]$, on a : $1+x>0$.

On en déduit que la fonction $x\mapsto 10\ln(1+x)-x$ est une primitive de *f* sur $[0;9]$.

D'où :

$$\int_3^9 f(x)dx=\left[10\ln(1+x)-x\right]_3^9=10\ln 10-9-(10\ln 4-3)=10\ln\frac{10}{4}-6=10\ln\frac{5}{2}-6$$

$$\boldsymbol{\int_3^9 f(x)dx=10\ln\frac{5}{2}-6}$$

Partie 2.

→ *Question 1.a.*

Un prix de vente de 40 euros la boîte correspond à $x = 4$.
D'après le graphique, on a : $f(4) = 1$.

Le calcul donne : $f(4) = \frac{10}{1+4} - 1 = \frac{10}{5} - 1 = 2 - 1 = 1$. On retrouve bien la valeur lue sur le graphique.

Si le prix de vente est de 40 euros, 100 boîtes seront achetées.

→ *Question 1.b.*

Le marché atteint son prix d'équilibre lorsque l'offre est égale à la demande. C'est à dire lorsque l'on a l'égalité $f(x) = g(x)$.

Graphiquement, nous cherchons donc le point d'intersection des courbes représentatives des fonctions *f* et *g*. Il s'agit du point E de coordonnées 3 et 1,5.

A la première question de la partie 1 nous avons obtenu comme unique solution de l'équation $f(x) = g(x)$ la valeur 3.

Nous pouvons donc immédiatement conclure que le prix d'équilibre s'élève à 30 euros.

On a alors : $f(3) = g(3) = \frac{3}{2} = 1{,}5$. On en déduit que le nombre de boîtes correspondant au prix d'équilibre s'élève à 150. La lecture graphique est ainsi confirmée.

L'équilibre du marché est défini par un prix de 30 euros et une quantité de 150 boîtes.

→ *Question 2.a.*

Notons $\mathcal{A}(\text{OAE})$ l'aire du triangle OAE.
On a : $\text{O}(0;0)$, $\text{A}(3;0)$ et $\text{E}(3;1{,}5)$. On en tire : $\text{OA} = 3$ et $\text{AE} = 1{,}5$.

Le repère du graphique étant orthonormal, le triangle OAE est rectangle en A et on a :

$$\mathcal{A}(\text{OAE}) = \frac{\text{OA} \times \text{AE}}{2} = \frac{3 \times 1{,}5}{2} = 2{,}25$$

L'aire du triangle OAE est donc égale à 2,25 unités d'aire, soit 2 250 euros.

Le surplus des producteurs s'élève à 2 250 euros.

→ *Question 2.b.*

L’aire grisée sur le graphique est l’aire du domaine limité par l’axe des abscisse, la courbe représentative de la fonction f et les droites d’équations $x=3$ et $x=9$.

L’intégrale permettant de calculer le surplus des consommateurs d’écrit donc : $\int_3^9 f(x)\,dx$.

Cette intégrale a été calculée à la question 2 de la deuxième partie et sa valeur exacte est égale à $10\ln\frac{5}{2}-6$ unités d’aire soit, en arrondissant à l’euro : 3 163 euros.

Le surplus des consommateurs est égal à 3 163 euros (valeur arrondie à l’unité).