

1. Soit f la fonction définie sur $[+1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[+1; +\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- Justifier que f et H sont bien définies sur $[+1; +\infty[$.
- Quelle relation existe-t-il entre H et f ?
- Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose dans cette question de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

- Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.
- En déduire que $\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$.
- Montrer que si $1 \leq x \leq 3$ alors $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.
- En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ puis de $\int_1^3 f(x) dx$.

Analyse

Exponentielle, logarithme népérien et calcul intégral sont les principaux ingrédients de l'exercice composé de deux parties. La première comporte plusieurs questions de cours sur les thèmes de l'intégration et de la dérivation. La seconde vise à l'obtention d'un encadrement d'une intégrale.

Résolution

→ Question 1.a.

Considérons la fonction définie par : $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$. Elle est définie pour toute valeur de x n'annulant pas le dénominateur. Or, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Pour la fonction f , on considère l'intervalle $[+1; +\infty[$ qui ne contient pas 0, elle y donc bien définie.

La fonction f est continue sur $[+1; +\infty[$ comme rapport de deux fonctions continues sur cet intervalle. Pour tout x dans $[+1; +\infty[$, l'intégrale $\int_1^x \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_1^x f(t) dt$ est donc définie.

Les fonctions f et H sont bien définies sur $[+1; +\infty[$.

→ Question 1.b.

La fonction f étant continue sur $[+1; +\infty[$, alors pour tout réel x de cet intervalle, $\int_1^x f(t) dt$ est la primitive de f s'annulant en 1. On a donc pour tout x réel de $[+1; +\infty[$: $H'(x) = f(x)$.

**La fonction H est la primitive de f s'annulant en 1
et on a, pour tout réel x de $[+1; +\infty[$: $H'(x) = f(x)$**

→ Question 1.c.

On a $H(3) = \int_1^3 f(t) dt$. Remarquons que la fonction f prend des valeurs positives sur

l'intervalle $[+1; +\infty[$. En effet, on a, pour tout réel x de cet intervalle : $e^x - 1 \geq e^1 - 1 > 0$.

L'intégrale $\int_1^3 f(t) dt$ s'interprète alors comme l'aire, en unité d'aire, du domaine défini par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Le nombre $H(3)$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine défini par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

→ *Question 2.a.*

On obtient facilement le résultat en mettant e^x en facteur. Pour tout x réel on a :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x \times \cancel{e^x} \times \frac{1}{e^x}}{\cancel{e^x} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{x \times e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Le résultat est valable pour tout x réel, il l'est, à fortiori, pour tout réel strictement positif.

Pour tout $x > 0$, on a : $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

→ *Question 2.b.*

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est définie (son dénominateur s'annule pour 0) sur $[+1; +\infty[$. On

constate que l'on a : $\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x}$.

Pour tout réel x de $[+1; +\infty[$, on a $e^x > e$ (croissance de la fonction exponentielle), d'où :

$-\frac{1}{e^x} > -\frac{1}{e}$ (croissance de l'opposé de l'inverse) et, finalement $1 - \frac{1}{e^x} > 1 - \frac{1}{e} > 0$.

La fonction u prend donc des valeurs strictement positives sur $[+1; +\infty[$ et donc sur $[+1; +3]$.

On tire de ce qui précède que la fonction $x \mapsto \ln u(x) = \ln(1 - e^{-x})$ est une primitive sur

$[+1; +3]$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

En procédant alors à une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \left[x \times \ln(1 - e^{-x}) \right]_1^3 - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \times \ln(1 - e^{-3}) - 1 \times \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

→ *Question 2.c.*

Soit un réel x tel que : $1 \leq x \leq 3$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur \mathbb{R} , on en tire :

$$e \leq e^x \leq e^3$$

Puis, la fonction opposée de la fonction inverse étant, elle aussi, strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} :

$$-\frac{1}{e} \leq -\frac{1}{e^x} \leq -\frac{1}{e^3}$$

Alors :

$$1 - \frac{1}{e} \leq 1 - \frac{1}{e^x} \leq 1 - \frac{1}{e^3}$$

Comme $e > 1$, on a $1 - \frac{1}{e} > 0$ et on peut considérer les logarithmes népériens des quantités ci-dessus en tenant compte du fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

→ *Question 2.d.*

L'inégalité précédente nous permet de ranger dans le même ordre les intégrales prises de 1 à 3 :

$$\int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) dx \leq \int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) dx \leq \int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) dx$$

Soit :

$$\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \times (3-1) \leq \int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) dx \leq \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) \times (3-1)$$

Et finalement :

$$2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) dx \leq 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$$

$$2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) dx \leq 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$$

A la question 2.b., nous avons établi :

$$H(3) = \int_1^3 f(x) dx = 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x}) dx$$

On fait alors apparaître cette expression dans l'encadrement précédent :

$$\begin{aligned} 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) &\leq \int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) dx \leq 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) \\ -2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) &\leq -\int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) dx \leq -2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \\ -2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) + 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) &\leq H(3) \leq 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \\ \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) &\leq H(3) \leq 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - 3\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \\ \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) &\leq H(3) \leq 3\left[\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right] \end{aligned}$$

On peut simplifier l'encadrement obtenu en utilisant la factorisation suivante :

$e^3 - 1 = (e-1)(e^2 + e + 1)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) &= \ln\left(\frac{e^3-1}{e^3}\right) - \ln\left(\frac{e-1}{e}\right) = \ln\left(\frac{e^3-1}{e^3} \times \frac{e}{e-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(e-1)(e^2+e+1)}{e^3} \times \frac{e}{e-1}\right) = \ln\frac{e^2+e+1}{e^2} \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}\right) \end{aligned}$$

Finalemment :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}\right) \leq H(3) \leq 3 \ln\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}\right)$$