

Antilles-Guyane – Juin 2004 - Exercice

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a .
2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a .
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$$

Démontrer, en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculer $J(a)$.

6. a) Démontrer que, pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

b) Démontrer que, pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7. En déduire que, pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Analyse

L'ensemble de l'exercice vise à fournir un polynôme de degré 5 approchant la fonction logarithme népérien au voisinage de 1 (d'où l'idée de travailler avec l'expression $\ln(1+a)$).

Il s'agit de la notion de « développement limité ». Les coefficients du polynôme sont obtenus via le calcul d'intégrales, une relation de récurrence entre ces intégrales étant obtenue grâce à une intégration par parties (question 3) sous-entendant une certaine maîtrise.

Résolution

→ *Question 1.*

Le réel a étant positif, on a : $0 \leq t \leq a \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 1+a$, d'où : $\forall t \in [0; a], 1+t > 0$.

On peut alors choisir la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ comme primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0; a]$. Il vient alors :

$$I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a) - \ln(1+0) = \ln(1+a) - \ln 1 = \ln(1+a)$$

$$I_0(a) = \ln(1+a)$$

→ *Question 2.*

$$\text{On a : } I_1(a) = \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2} dt.$$

Nous considérons la fonction u définie sur l'intervalle $[0; a]$ par : $u(x) = t - a$. Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme (affine) et on a : $u'(x) = 1$, qui est continue sur cet intervalle en tant que fonction constante.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ est continue sur l'intervalle $[0; a]$ en tant que fonction rationnelle. Elle y admet donc des primitives.

Nous pouvons alors poser $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} = (1+t)^{-2}$ et choisir comme primitive la fonction v

$$\text{définie par : } v(t) = \frac{1}{-2+1} (1+t)^{-2+1} = -(1+t)^{-1} = -\frac{1}{1+t}.$$

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}
 I_1(a) &= \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2} dt = \int_0^a u(t)v'(t) dt \\
 &= [u(t)v(t)]_0^a - \int_0^a u'(t)v(t) dt \\
 &= \left[-(t-a) \frac{1}{1+t} \right]_0^a + \int_0^a 1 \times \frac{1}{1+t} dt \\
 &= \cancel{-(a-a) \frac{1}{1+a}} + (0-a) \frac{1}{1+0} + I_0(a) \\
 &= -a + \ln(1+a)
 \end{aligned}$$

$$I_1(a) = -a + \ln(1+a)$$

→ *Question 3.*

Dans cette question, on généralise la démarche adoptée à la question précédente.

Soit k un entier naturel non nul. On a, d'après la définition de $I_k(a)$:

$$I_{k+1}(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^{k+1}}{(1+t)^{k+2}} dt.$$

Nous considérons alors la fonction u définie sur l'intervalle $[0; a]$ par : $u(x) = (t-a)^{k+1}$. Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme et on a : $u'(x) = (k+1)(t-a)^k$, qui est continue sur cet intervalle en tant que fonction polynôme.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^{k+2}}$ est continue sur l'intervalle $[0; a]$ en tant que fonction rationnelle. Elle y admet donc des primitives.

Nous pouvons alors poser $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}} = (1+t)^{-k-2}$ et choisir comme primitive la fonction

$$v \text{ définie par : } v(t) = \frac{1}{-k-2+1} (1+t)^{-k-2+1} = \frac{1}{-k-1} (1+t)^{-k-1} = -\frac{1}{k+1} \frac{1}{(1+t)^{k+1}}.$$

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}
 I_{k+1}(a) &= \int_0^a \frac{(t-a)^{k+1}}{(1+t)^{k+2}} dt = \int_0^a u(t)v'(t) dt \\
 &= [u(t)v(t)]_0^a - \int_0^a u'(t)v(t) dt \\
 &= \left[-(t-a)^{k+1} \frac{1}{k+1} \frac{1}{(1+t)^{k+1}} \right]_0^a + \int_0^a (k+1)(t-a)^k \times \frac{1}{k+1} \frac{1}{(1+t)^{k+1}} dt \\
 &= \cancel{-(a-a)^{k+1} \frac{1}{k+1} \frac{1}{(1+a)^{k+1}}} + (0-a)^{k+1} \frac{1}{k+1} \frac{1}{(1+0)^{k+1}} + I_k(a) \\
 &= \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \\
 &= \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)
 \end{aligned}$$

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$$

→ Question 4.

Nous allons utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer les intégrales requises :

$$\text{Avec } k=1, \text{ on a : } I_{1+1}(a) = I_2(a) = \frac{(-1)^{1+1} a^{1+1}}{1+1} + I_1(a) = \frac{1}{2} a^2 - a + \ln(1+a).$$

$$\text{Avec } k=2, \text{ on a : } I_{2+1}(a) = I_3(a) = \frac{(-1)^{2+1} a^{2+1}}{2+1} + I_2(a) = -\frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{2} a^2 - a + \ln(1+a).$$

$$\text{Avec } k=3, \text{ on a : } I_{3+1}(a) = I_4(a) = \frac{(-1)^{3+1} a^{3+1}}{3+1} + I_3(a) = \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{2} a^2 - a + \ln(1+a).$$

Enfin, avec $k=4$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_{4+1}(a) &= I_5(a) = \frac{(-1)^{4+1} a^{4+1}}{4+1} + I_4(a) = -\frac{1}{5} a^5 + \frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{2} a^2 - a + \ln(1+a) \\
 &= -\left(\frac{1}{5} a^5 - \frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^2 + a \right) + \ln(1+a) = -P(a) + \ln(1+a)
 \end{aligned}$$

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

→ Question 5.

On a, pour tout t réel $(t-a)^5 = u'(t) \times u^5(t)$ avec $u(t) = t-a$. Une primitive sur l'intervalle $[0; a]$ de la fonction $t \mapsto (t-a)^5$ est donc la fonction : $\frac{1}{5+1}u^{5+1} = \frac{1}{6}u^6$. Il vient alors :

$$J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt = \left[\frac{1}{6}(t-a)^6 \right]_0^a = \frac{1}{6}(a-a)^6 - \frac{1}{6}(0-a)^6 = -\frac{1}{6}(-a)^6 = -\frac{1}{6}a^6$$

$$J(a) = -\frac{1}{6}a^6$$

→ Question 6.a.

On a : $t \in [0; a] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq a \Leftrightarrow -a \leq t-a \leq 0$.

La fonction $x \mapsto x^5$ étant strictement croissante sur \mathbb{R} , il vient :

$$-a \leq t-a \leq 0 \Leftrightarrow (-a)^5 \leq (t-a)^5 \leq 0^5 \Leftrightarrow -a^5 \leq (t-a)^5 \leq 0$$

Par ailleurs, $t \geq 0 \Rightarrow 1+t \geq 1$. Or, la fonction $x \mapsto x^6$ étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , il

vient : $1+t \geq 1 \Rightarrow (1+t)^6 \geq 1^6 \Leftrightarrow (1+t)^6 \geq 1$. D'où : $\frac{1}{(1+t)^6} \leq 1$.

On a vu que $(t-a)^5$ était négatif. On a finalement : $\frac{1}{(1+t)^6} \leq 1 \Rightarrow \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

$$\forall t \in [0; a], \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$$

→ Question 6.b.

A la question précédente, nous avons établi l'inégalité $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$, valable pour tout réel t de l'intervalle $[0; a]$.

Comme on a également, sur ce même intervalle $(t-a)^5 \leq 0$ et $(1+t)^6 \geq 1 > 0$, on en déduit :

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$$

On a donc, finalement :

$$\forall t \in [0; a], (t-a)^5 \leq \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$$

Par positivité de l'intégrale, il vient alors :

$$\int_0^a (t-a)^5 dt \leq \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq \int_0^a 0 dt$$

C'est-à-dire :

$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

Ce résultat étant valable pour tout réel a positif, il vient enfin :

$$\forall a \in [0; +\infty[, J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

→ *Question 7.*

D'après les questions 4. et 5., la double inégalité précédente se récrit :

$$\forall a \in [0; +\infty[, -\frac{1}{6}a^6 \leq \ln(1+a) - P(a) \leq 0$$

Soit encore, la différence $\ln(1+a) - P(a)$ étant négative :

$$\forall a \in [0; +\infty[, -\frac{1}{6}a^6 \leq -|\ln(1+a) - P(a)| \leq 0$$

D'où, finalement :

$$\forall a \in [0; +\infty[, 0 \leq |\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{1}{6}a^6$$

On a bien :

$$\forall a \in [0; +\infty[, |\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{1}{6}a^6$$

→ *Question 8.*

Dire que $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près équivaut à :

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq 10^{-3}$$

Or, on a vu à la question précédente que pour tout réel a positif, on avait :

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{1}{6}a^6$$

Ainsi, si on choisit a de telle sorte que $\frac{1}{6}a^6 \leq 10^{-3}$, on aura :

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{1}{6}a^6 \Rightarrow |\ln(1+a) - P(a)| \leq 10^{-3}$$

On résout : $\frac{1}{6}a^6 \leq 10^{-3}$ en tenant compte du fait que a est un réel positif :

$$\frac{1}{6}a^6 \leq 10^{-3} \Leftrightarrow a^6 \leq 6 \times 10^{-3} \Leftrightarrow a \leq \sqrt[6]{6 \times 10^{-3}}$$

Enfinement :

**Pour tout réel a de l'intervalle $\left[0; \sqrt[6]{6 \times 10^{-3}}\right]$,
 $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.**

A titre de complément : $\sqrt[6]{6 \times 10^{-3}} \approx 0,426$ à 10^{-3} près.