

1. Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- Justifier que f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$;
- Quelle relation existe-t-il entre H et f ?
- Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b) En déduire que :

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx.$$

c) Montrer que, si $1 \leq x \leq 3$, alors :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

d) En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$, puis de

$$\int_1^3 f(x) dx.$$

Analyse

Le calcul intégral est le thème principal de cet exercice. Classiquement, les principales propriétés de l'intégrale sont requises et il convient de savoir mener une intégration par parties.

Résolution

→ Question 1.a.

Le numérateur de $f(x)$ est défini pour tout x réel. Son dénominateur peut, en revanche s'annuler et on a :

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Comme 0 n'appartient pas à l'intervalle $[1; +\infty[$, on en déduit que la fonction f y est définie.

Par ailleurs, les fonctions : identité, exponentielle et $x \mapsto -1$ sont continues sur \mathbb{R} et donc, à fortiori, sur l'intervalle $[1; +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^x - 1$ y est également

continue. Comme, en outre, elle ne s'y annule pas, on en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$,

c'est-à-dire la fonction f , est elle aussi continue sur $[1; +\infty[$. L'intégrale $\int_1^x f(t) dt$ est alors définie pour toute valeur de x dans $[1; +\infty[$. La fonction H est donc bien définie sur cet intervalle.

Les fonctions f et H sont bien définies sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

→ Question 1.b.

La fonction $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ est la primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$, s'annulant en 1. On a donc, pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$: $H'(x) = f(x)$.

$$\forall x \in [1; +\infty[, H'(x) = f(x).$$

→ Question 1.c.

On a : $H(3) = \int_1^3 f(t) dt$.

Or, pour tout x dans l'intervalle $[1; +\infty[$, on a : $e^x \geq e^1$.

D'où : $e^x - 1 \geq e - 1 > 0$. Puis : $f(x) > 0$.

On en déduit immédiatement :

$H(3)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe C , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = 3$.

→ *Question 2.a.*

Pour tout x réel, on a $e^x \neq 0$ et donc :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{1}{e^x - 1} = x \times \frac{1}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = x \times \frac{\frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Cette égalité étant vraie pour tout x réel, elle l'est pour tout x réel strictement positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

→ *Question 2.b.*

Nous allons utiliser le résultat précédent pour calculer $H(3) = \int_1^3 f(x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[1; 3]$, par : $u(x) = x$. Elle y est dérivable, et donc continue, en tant que fonction polynôme (plus précisément linéaire) et on a : $u'(x) = 1$.

Pour tout x réel tel que : $1 \leq x \leq 3$, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 3 &\Leftrightarrow e \leq e^x \leq e^3 \Leftrightarrow \frac{1}{e^3} \leq \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e^3} \leq e^{-x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \\ &-\frac{1}{e} \leq -e^{-x} \leq -\frac{1}{e^3} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

Comme $1 - \frac{1}{e} > 0$ et comme la dérivée de la fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto e^{-x}$, on

peut finalement écrire : $\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{w'(x)}{w(x)}$ avec $w(x) = 1 - e^{-x} > 0$.

Comme primitive de la fonction $x \mapsto \frac{w'(x)}{w(x)}$, on peut alors choisir la fonction définie par :

$$v(x) = \ln(w(x)) = \ln(1 - e^{-x}).$$

L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} H(3) &= \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_1^3 \left(x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) dx \\ &= \int_1^3 (u(x) \times v'(x)) dx \\ &= [u(x) \times v(x)]_1^3 - \int_1^3 (u'(x) \times v(x)) dx \\ &= \left[x \times \ln(1 - e^{-x}) \right]_1^3 - \int_1^3 (1 \times \ln(1 - e^{-x})) dx \\ &= 3 \times \ln(1 - e^{-3}) - 1 \times \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \end{aligned}$$

L'égalité demandée est ainsi établie.

$$H(3) = \int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

→ *Question 2.c.*

A la question 2.b., on a montré que pour tout x réel compris entre 1 et 3, on avait :

$$1 - \frac{1}{e} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{e^3}$$

Puisque les quantités considérées sont strictement positives et que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a : $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

On a bien l'encadrement demandé :

$$\text{Pour tout } x \text{ réel compris entre 1 et 3, } \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

→ Question 2.c.

L'encadrement obtenu à la question précédente étant valable pour tout x réel compris entre 1 et 3, on a :

$$\int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \int_1^3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) dx$$

D'où :

$$2\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

On en tire alors :

$$-2\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \leq -\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq -2\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Puis :

$$\begin{aligned} 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) &\leq 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &\leq 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) &= \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &= \ln\frac{e^3 - 1}{e^3} - \ln\frac{e - 1}{e} \\ &= \ln(e^3 - 1) - \ln(e - 1) - \ln e^3 + \ln e \\ &= \ln[(e - 1)(e^2 + e + 1)] - \ln(e - 1) - 2 \\ &= \ln(e^2 + e + 1) - 2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)-2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) &= 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-3\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \\ &= 3\left(\ln\frac{e^3-1}{e^3}-\ln\frac{e-1}{e}\right) \\ &= 3(\ln(e^3-1)-3\ln e-\ln(e-1)+\ln e) \\ &= 3(\ln[(e-1)(e^2+e+1)]-\ln(e-1)-2) \\ &= 3[\ln(e^2+e+1)-2] \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\ln(e^2+e+1)-2 \leq 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)-\int_1^3 \ln(1-e^{-x}) dx \leq 3[\ln(e^2+e+1)-2]$$

Soit :

$$\ln(e^2+e+1)-2 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3[\ln(e^2+e+1)-2]$$

A titre de complément, précisons que l'on a :

- $\ln(e^2+e+1)-2 \simeq 0,407\ 606$;
- $3[\ln(e^2+e+1)-2] \simeq 1,222\ 818$;
- $H(3) = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{x}{e^x-1} dx \simeq 0,663\ 801$.