France métropolitaine – Juin 2007 – Série S – Exercice

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $\left[a;b\right]$.

2. Soit les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$
$$\text{et } J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Analyse

Une question de cours et un exercice consacrés, une fois n'est pas (plus ?) coutume à un unique thème : l'intégration par parties.

Résolution

Question 1.

On considère deux fonctions *f* et *g* définies et dérivables sur l'intervalle $[a;b]$ et dont les dérivées sont continues sur cet intervalle.

La formule de dérivation d'un produit s'écrit ici :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Les fonctions *f* et *g* admettant des dérivées continues sur l'intervalle $[a;b]$, les fonctions $f'g$ et fg' sont continues sur $[a;b]$ comme produits de deux fonctions continues sur cet intervalle. Il en va de même pour leur somme et on a alors :

$$\int_a^b (fg)'(t)\,dt = \int_a^b (f'g + fg')(t)\,dt$$

Soit, l'intégrale étant linéaire :

$$\int_a^b (fg)'(t)\,dt = \int_a^b (f'g)(t)\,dt + \int_a^b (fg')(t)\,dt$$

Enfin, la fonction fg étant une primitive de sa dérivée :

$$\left[(fg)(t)\right]_a^b = \int_a^b (f'g)(t)\,dt + \int_a^b (fg')(t)\,dt$$

On en tire alors finalement la formule classique de l'intégration par parties :

$$\int_a^b (fg')(t)\,dt = \left[(fg)(t)\right]_a^b - \int_a^b (f'g)(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b (f'g)(t)\,dt$$

Question 2.a.

On considère $I = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$.

Considérons alors la fonction sinus définie sur l'intervalle $[0;\pi]$. Nous la notons *f*. La fonction sinus étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout réel *x* de cet intervalle : $f'(x) = \cos x$. La dérivée f' est continue sur cet intervalle.

Considérons maintenant la fonction exponentielle définie sur l'intervalle $[0;\pi]$. La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur $[0;\pi]$ et nous pouvons poser $g'(x)=e^x$ avec $g: x \mapsto e^x$.

Les conditions d'application de la formule d'intégration par parties sont réunies et il vient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^x \sin x dx \\ &= \left[e^x \sin x\right]_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi e^x \cos x dx}_{=J} \\ &= e^\pi \underbrace{\sin \pi}_{=0} - e^0 \underbrace{\sin 0}_{=0} - J \\ &= -J \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{I = -J}$$

Nous considérons cette fois $I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$ et allons encore procéder à une intégration par parties.

Nous ne redétaillons pas la démarche précédente : seule la fonction *f* est changée : il s'agit cette fois de la fonction cosinus définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ et dont la fonction dérivée est définie par : $f'(x) = -\sin x$ sur ce même intervalle.

L'intégration par parties s'écrit cette fois :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= \left[e^x \cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (-\sin x) dx \\ &= e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0 + \underbrace{\int_0^\pi e^x \sin x dx}_{=I} \\ &= -e^\pi - 1 + I \end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{I = J + e^\pi + 1}$$

Question 2.b.

D'après la question précédente, nous avons : $I=-J$ et $I=J+e^{\pi}+1$. En additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient immédiatement : $2I=e^{\pi}+1$, soit : $I=\frac{e^{\pi}+1}{2}$. Il vient alors : $J=-I=-\frac{e^{\pi}+1}{2}$.

$$\boxed{I=\frac{e^{\pi}+1}{2} \text{ et } J=-\frac{e^{\pi}+1}{2}}$$