

Amérique du Nord – Série ES – Juin 2004 – Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x}$$

1.a. Résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$; (calculer la valeur exacte de la solution, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-3}). **[0,5 pt]**

b. Résoudre dans I l'inéquation $f(x) > 0$. **[0,5 pt]**

2. On donne ci-dessous le tableau de variation de f sur l'intervalle I . Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau (variations, limites, valeurs numériques). **[1,5 pt]**

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur l'intervalle $]0, 2; +\infty[$ le « bénéfice » mensuel (éventuellement négatif) réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice est exprimé en milliers d'euros. En utilisant les résultats des questions précédentes, répondre aux questions suivantes :

a. Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle vendre mensuellement pour que le bénéfice soit positif ? **[1 pt]**

b. Combien faut-il vendre d'objets pour réaliser le bénéfice maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice maximal ? **[1,5pt]**

Analyse

Le début de l'exercice propose l'étude d'une fonction classique.
La deuxième partie vise à tirer parti des résultats obtenus dans le cadre d'une situation économique.

Résolution

Question 1.a.

Sur $I =]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $1 + \ln x = 0$.

D'où : $\ln x = -1$ et donc : $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

On note que la valeur obtenue est strictement positive et appartient donc à l'intervalle I .

Finalement :

$$x = \frac{1}{e}$$

On a, par ailleurs : $\frac{1}{e} \simeq 0,368$ à 10^{-3} près.

Question 1.b.

Pour tout réel x de l'intervalle I , on a : $\frac{2}{x} > 0$. Or, $f(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$.

On en déduit que sur I l'inéquation $f(x) > 0$ équivaut à $1 + \ln x > 0$. Soit $\ln x > -1$.

D'où, l'exponentielle étant une fonction strictement croissante : $x > e^{-1}$.

Finalement : $x > \frac{1}{e}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ s'écrit donc :

$$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$$

Question 2.

Commençons par déterminer les limites de la fonction f aux bornes de I .

A droite de 0 :

Ecrivons : $f(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$; donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x} = +\infty$.

Par ailleurs, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$; donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x) = -\infty$

Des deux résultats précédents on tire, par multiplication :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{2}{x} (1 + \ln x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

En $+\infty$:

Ecrivons : $f(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x) = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$.

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$, il vient finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Etudions maintenant les variations de la fonction f sur I .

La fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ est dérivable sur I , le logarithme népérien étant défini et dérivable sur cet intervalle.

La fonction $x \mapsto x$ est également dérivable sur I en tant que fonction polynôme.

La fonction f est donc dérivable sur I comme rapport de deux fonctions dérivables sur I et on a, pour tout réel strictement positif :

$$f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = 2 \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -2 \frac{\ln x}{x^2}$$

La dérivée lorsque $\ln x = 0$ c'est à dire pour $x = 1$.

On a alors : $f(1) = \frac{2(1 + \ln 1)}{1} = \frac{2 \times 1}{1} = 2$.

Par ailleurs, on a pour tout réel de I : $\frac{-2}{x^2} > 0$.

On a donc, finalement :

- Pour $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ et $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$;
- Pour $x > 1$, $\ln x > 0$ et $f'(x) < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$;
- $f'(1) = 0$ et $f(1) = 2$.

Question 3.a.

A la question 1.b., on a vu que l'inégalité $f(x) > 0$ était équivalente à $x > \frac{1}{e}$.

On avait également obtenu une valeur approchée par excès de $\frac{1}{e}$ à 10^{-3} : 0,368.

Cette valeur appartient bien à l'intervalle $[0, 2; +\infty[$.

On en déduit, la variable x désignant des milliers d'objets fabriqués par l'entreprise, que le bénéfice sera positif pour une production mensuelle minimale de $0,368 \times 1000 = 368$ objets.

Le bénéfice sera positif pour une production mensuelle minimale de 368 objets.

Question 3.b.

D'après l'étude de la fonction f menée à la question 2, celle-ci est continue (en tant que fonction dérivable), croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

Elle admet donc un maximum pour $x = 1$ et ce maximum vaut : $f(1) = 2$ (cf. question 2).

Le bénéfice étant exprimé en milliers d'euros, on en déduit que pour 1000 objets fabriqués, l'entreprise réalisera un bénéfice maximal de 2000 euros.

Le bénéfice de l'entreprise sera maximal pour 1000 objets fabriqués et vaut alors 200 euros.