Inde – Série ES – Avril 2005 - Exercice

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

Partie A – Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a $f'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$. **[0,5 pt]**
2. En déduire le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées). **[0,75 pt]**
3. Justifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $\ln x<\sqrt{x}$. **[0,75 pt]**

Partie B – Utilisation des théorèmes de comparaison

1. Démontrer que, pour tout x strictement supérieur à 1, on a :
$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$ **[1 pt]**
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

   Rappel : la dérivée de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **[1 pt]**

Analyse

On a affaire ici à un exercice qui se trouve être une question de cours (démonstration d'un résultat classique). Les candidats n'auront probablement pas été trop déroutés par le contenu. Mathématiquement parlant, l'exercice ne pose pas de difficulté particulière mais requiert une rédaction précise et argumentée.

Résolution

Partie A – Etude d'une fonction

→ Question 1.

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. La fonction dérivée du logarithme népérien est la fonction inverse et la fonction dérivée de la racine carrée est (cf. le rappel fourni) la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Il vient donc :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}}$$

→ Question 2.

On étudie le signe de $f'(x)$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur puisque, x étant strictement positif, il en va de même de son dénominateur.

On a : $2-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Par ailleurs, pour $x = 4$, on a : $f'(4) = 0$ et $f(4) = \ln 4 - \sqrt{4} = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0;4]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[4;+\infty[$.

On en déduit, les limites aux bornes n'étant pas demandées :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$		$\nearrow$	$2(\ln 2-1)$	$\searrow$	

→ Question 3.

D'après la question précédente, la fonction *f* admet un maximum pour $x=4$.
On a donc : pour tout *x* réel strictement positif : $f(x)\leq f(4)$.

Or, $f(4)=2(\ln 2-1)$. Comme $2<e$ et comme le logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$, il vient : $\ln 2<\ln e$, soit $\ln 2<1$.

On en déduit : $f(4)<0$.

D'où : pour tout *x* réel strictement positif : $f(x)\leq f(4)<0$.

Il vient alors : pour tout *x* réel strictement positif : $\ln x-\sqrt{x}<0$.
Finalement :

Pour tout *x* réel strictement positif : $\ln x<\sqrt{x}$.

Partie B – Utilisation des théorèmes de comparaison

→ Question 1.

Pour tout réel *x* strictement supérieur à 1, on a $\ln x>0$ et on peut écrire, d'après la question précédente : $0<\ln x<\sqrt{x}$.
En divisant alors chaque membre de cette double inégalité par *x*, qui est strictement positif, il vient : $\frac{0}{x}<\frac{\ln x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}$. Soit, en simplifiant : $0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Finalement :

Pour tout réel *x* strictement supérieur à 1, on a : $0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$.

→ Question 2.

On a le résultat classique : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

On en déduit : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

L'encadrement obtenu à la question précédente étant valable sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ tendant vers 0 en $+\infty$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Le résultat est ainsi démontré.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$