

## Polynésie – Septembre 2002 - Exercice

*On peut traiter la question 4 sans avoir traité les questions précédentes.*

Pour un achat immobilier, lorsqu'une personne emprunte une somme de 50 000 euros, remboursable par  $n$  mensualités chacune égale à  $A$  euros, pour un intérêt mensuel de 0,4%, le montant de cette mensualité  $A$  est donné par :  $A = \frac{200}{1 - (1,004)^{-n}}$  (on ne demande pas d'établir cette relation).

1. Calculer la mensualité  $A$  lorsque cette personne emprunte 50 000 euros remboursable par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4%. On donnera une valeur arrondie au centime d'euro.

Calculer alors le montant total des intérêts pour ce prêt. **[1 pt]**

2. Mêmes questions avec un emprunt de 50 000 euros sur 8 ans à 0,4% mensuel. **[0,5 pt]**

3. Afin de payer le moins d'intérêts possible, l'emprunteur doit augmenter le montant de la mensualité et diminuer la période de remboursement. Mais il ne peut supporter au maximum que des remboursements de 950 euros par mois.

a) Résoudre dans  $[0; +\infty[$  l'inéquation :  $\frac{200}{1 - (1,004)^{-n}} \leq 950$ . **[1 pt]**

b) En déduire le nombre entier  $n$  minimum de mensualités pour le quel le montant de la mensualité  $A$  est inférieur ou égal à 950 euros.

Que vaut alors  $A$  arrondi au centime d'euro ? Calculer alors le montant total des intérêts.

4. Voici des extraits du tableau d'amortissement d'un prêt de 50 000 euros remboursable par 60 mensualités pour un intérêt de 0,4%.

Calculer, en détaillant, les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  qui figurent dans le tableau.

On donnera des valeurs arrondies au centime d'euro.

N° de la mensualité	Montant de la mensualité en euros	Part des intérêts en euros pour cette mensualité	Capital amorti en euros	Capital restant à rembourser en euros
1	938,99	200,00	738,99	49 261,01
2	938,99	197,04	<i>a</i>	<i>b</i>
3	938,99	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
4	938,99	191,10	747,89	47 026,26
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
59	938,99	7,47	931,52	935,25
60	938,99	3,74	935,25	0

---

## Analyse

Un exercice de calculs financiers ... chose, hélas, plutôt rare au BAC de la série ES. Si l'exercice ne présente pas de difficulté particulière et ne requiert pas de nombreuses connaissances mathématiques, il convient cependant d'avoir bien compris ce qu'est un taux d'intérêt !

---

## Résolution

### → Question 1.

Dans cette question,  $n = 120$ . Il vient alors :

$$A = \frac{200}{1 - (1,004)^{-n}} = \frac{200}{1 - (1,004)^{-120}} \approx 525,45$$

**Lorsque la personne emprunte 50 000 euros remboursable par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4%, la mensualité s'élève à 525,45 euros (valeur arrondie au centime d'euro).**

Cette personne va donc déboursier un total de :  $120 \times A = 120 \times 525,45 = 63\,054$  euros. Le capital emprunté s'élevant à 50 000 euros, on en déduit que le montant total des intérêts s'élève à :  $63\,054 - 50\,000 = 13\,054$  euros.

**Le montant total des intérêts s'élèvera à 13 054 euros.**

### → Question 2.

La démarche est exactement celle de la question précédente mais cette fois, on a :  $n = 8 \times 12 = 96$ . D'où :

$$A = \frac{200}{1 - (1,004)^{-n}} = \frac{200}{1 - (1,004)^{-96}} \approx 628,25$$

**Lorsque la personne emprunte 50 000 euros remboursable par 96 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4%, la mensualité s'élève à 628,25 euros (valeur arrondie au centime d'euro).**

Cette personne va alors déboursier un total de :  $96 \times A = 96 \times 628,25 = 60\,312$  euros. Le capital emprunté s'élevant à 50 000 euros, on en déduit que le montant total des intérêts s'élève à :  $60\,312 - 50\,000 = 10\,312$  euros.

**Le montant total des intérêts s'élèvera à 10 312 euros.**

→ Question 3.a.

$$\text{Résolution de : } \frac{200}{1-(1,004)^{-n}} \leq 950.$$

$$\text{Le membre de gauche se récrit : } \frac{200}{1-(1,004)^{-n}} = \frac{200}{1-\frac{1}{1,004^n}}.$$

Comme  $1,004 > 1$  et  $n$  positif, il vient :  $1,004^n > 1$ . On en déduit :  $\frac{1}{1,004^n} < 1$  puis

$$1 - \frac{1}{1,004^n} > 0. \text{ L'inégalité } \frac{200}{1-(1,004)^{-n}} \leq 950 \text{ équivaut donc à : } 200 \leq 950(1-(1,004)^{-n}).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} 200 \leq 950(1-(1,004)^{-n}) &\Leftrightarrow 1-(1,004)^{-n} \geq \frac{200}{950} \\ &\Leftrightarrow 1-(1,004)^{-n} \geq \frac{4}{19} \\ &\Leftrightarrow (1,004)^{-n} \leq 1 - \frac{4}{19} \\ &\Leftrightarrow (1,004)^{-n} \leq \frac{15}{19} \end{aligned}$$

Les deux membres de cette inégalité étant strictement positifs, ils sont ordonnés comme leurs logarithmes népériens. On a donc :

$$\begin{aligned} \ln[(1,004)^{-n}] \leq \ln \frac{15}{19} &\Leftrightarrow -n \ln 1,004 \leq \ln \frac{15}{19} \\ &\Leftrightarrow -n \leq \frac{\ln \frac{15}{19}}{\ln 1,004} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln \frac{15}{19}}{\ln 1,004} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \frac{19}{15}}{\ln 1,004} \end{aligned}$$

Puisque l'on résout cette inéquation dans  $[0; +\infty[$  et que l'on a

$$\frac{\ln \frac{19}{15}}{\ln 1,004} = \frac{\ln 19 - \ln 15}{\ln 1,004} \approx 59,2 > 0 \text{ (valeur arrondie au dixième), on en déduit que l'ensemble}$$

$$\text{de solution est : } \left[ \frac{\ln 19 - \ln 15}{\ln 1,004}; +\infty \right[.$$

$$\text{L'ensemble de solution de l'inéquation : } \frac{200}{1 - (1,004)^{-n}} \leq 950 \text{ est : } \left[ \frac{\ln 19 - \ln 15}{\ln 1,004}; +\infty \right[.$$

→ *Question 3.b.*

On a vu, à la question précédente, que l'on avait :  $\frac{\ln \frac{19}{15}}{\ln 1,004} \approx 59,2$  (valeur arrondie au dixième). On en déduit immédiatement que le plus petit entier naturel  $n$  tel que le montant de la mensualité  $A$  soit inférieure à 950 euros est 60.

**Le nombre minimum de mensualités pour lequel la mensualité  $A$  est inférieure à 950 euros est 60.**

Il vient alors :

$$A = \frac{200}{1 - (1,004)^{-n}} = \frac{200}{1 - (1,004)^{-60}} \approx 938,99$$

**Lorsque la personne emprunte 50 000 euros remboursable par 60 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4%, la mensualité s'élève à 938,99 euros (valeur arrondie au centime d'euro).**

On procède alors comme dans les questions 1 et 2 : cette personne va alors déboursier un total de :  $60 \times A = 60 \times 938,99 = 56\,339,40$  euros. Le capital emprunté s'élevant à 50 000 euros, on en déduit que le montant total des intérêts s'élève à :  $56\,339,40 - 50\,000 = 6\,339,40$  euros.

**Le montant total des intérêts s'élèvera à 6 339,40 euros.**

→ *Question 4.*

La mensualité est de 938,99 euros. Sur ce montant, les intérêts payés (calculés à partir du capital restant à rembourser au début du deuxième mois, savoir 49 261,01 euros) représentent 197,04 euros. On en déduit que le capital amorti au cours du deuxième mois s'élève à :  $938,99 - 197,04 = 741,95$  euros. Finalement :  $a = 741,95$ .

Ce montant doit être ôté du capital restant à rembourser au début du deuxième mois pour pouvoir obtenir  $b$ , montant du capital restant à rembourser au début du troisième mois :  
 $b = 49\,261,01 - 741,95 = 48\,519,06$ .

Ce capital va nous permettre de calculer les intérêts du troisième mois. Il suffit pour cela de lui appliquer le taux de 0,4% :  $48\,519,06 \times 0,4\% = 194,08$ . On a donc :  $c = 194,08$ .

On obtient alors  $d$  et  $e$  en procédant comme pour  $a$  et  $b$  :  $d = 938,99 - 194,08 = 744,91$  puis :  
 $e = 48\,519,06 - 744,91 = 47\,774,15$ .

Finalemment :

	$a = 741,95$	$b = 48\,519,06$
$c = 194,08$	$d = 744,91$	$e = 47\,774,15$