Amérique du sud – Novembre 2002 - Exercice

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(x+1)-\ln x$$

a) Montrer que, pour tout $x>0$, $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. [0,5 POINT]

b) Etudier le signe de $g(x)$. [0,5 POINT]

c) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$ [0,5 POINT]

d) Démontrer que la fonction G, définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathrm{G}(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x)$, est une primitive de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$. [0,5 POINT]

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+2+\ln(x+1)-\ln x$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan (unité graphique : 1 cm). On ne demande pas de tracer (C). En utilisant les résultats du **1**, justifier les affirmations suivantes :

a) L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe (C). [0,5 POINT]

b) La droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$. [0,5 POINT]

c) La courbe (C) est au-dessus de la droite (D). [0,5 POINT]

3. Calculer $\int_1^3\left[f(x)-(x+2)\right]dx$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de cette intégrale ? [1,5 POINT]

Analyse

Un exercice comportant des questions diverses et variées sur le thème du logarithme népérien. Les questions 1.a à 1.d sont fondamentalement des applications directes du cours. Dans les questions 2 et 3, on utilise l'égalité $f(x)-(x+2)=g(x)$ pour déduire rapidement des résultats sur la fonction *f* à partir de ceux obtenus sur la fonction *g*.

Résolution

→ Question 1.a.

Pour tout réel *x* strictement positif, on peut écrire :

$$g(x)=\ln(x+1)-\ln(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

On a bien, pour tout *x* réel strictement positif :

$$\boxed{g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

→ Question 1.b.

Pour tout *x* réel strictement positif, on a : $\frac{1}{x}>0$ et donc : $1+\frac{1}{x}>1$. Or, le logarithme népérien de tout nombre strictement supérieur à 1 est strictement positif. Il vient donc, pour tout *x* réel strictement positif :

$$\boxed{g(x)>0}$$

→ Question 1.c.

Nous devons déterminer la limite de *g* en 0 (à droite) et en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et, de fait : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$. On en déduit (limite d'une fonction composée) : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=+\infty}$$

On a par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et, de fait : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

On en déduit : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{X\to1}\ln X=\ln 1=0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=0}$$

➔ *Question 1.d.*

Pour établir le résultat demandé, il suffit de montrer que la dérivée de la fonction G sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est égale à la fonction *g*.

Avec, pour tout réel *x* strictement positif, $\mathrm{G}(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x)$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{G}'(x)&=1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}-\left[1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right]\\&=\ln(x+1)+1-\left[\ln(x)+1\right]\\&=\ln(x+1)-\ln(x)\\&=g(x)\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\text{La fonction G définie sur }]0;+\infty[\text{ par } \mathrm{G}(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x) \text{ est une primitive de la fonction } g \text{ sur cet intervalle.}}$$

➔ *Question 2.a.*

Remarquons que l'on a pour tout réel *x* strictement positif : $f(x)=x+2+g(x)$.

Comme : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=+\infty$ et comme $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+2)=2$, il vient immédiatement : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x=0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est asymptote à (C).

$$\boxed{\text{L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe (C).}}$$

➔ *Question 2.b.*

Pour montrer que la droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$, il convient d'établir : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$.

Par définition de la fonction *f*, on a, pour tout réel *x* strictement positif :

$$f(x)-(x+2)=g(x)$$

Il vient donc : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Nous avons calculé cette limite à la question 1.c et obtenu 0 comme valeur :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

Le résultat est ainsi établi.

La droite d'équation $y=x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

→ *Question 2.c.*

Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), il convient de déterminer le signe de

$$f(x)-(x+2)=g(x)$$

A la question 1.b, on a établi que $g(x)$ était strictement positif pour tout réel *x* strictement positif. On en déduit immédiatement que la différence $f(x)-(x+2)$ est strictement positive pour tout réel *x* strictement positif. Finalement :

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la courbe (C) est au-dessus de (D).

→ *Question 3.*

A la question 1.d, on a établi que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par :
$\mathrm{G}(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x)$, était une primitive de la fonction *g* sur cet intervalle.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_1^3\left[f(x)-(x+2)\right]dx&=\int_1^3 g(x)\,dx\\&=\left[\mathrm{G}(x)\right]_1^3\\&=\left[(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x)\right]_1^3\\&=4\ln4-3\ln3-\left(2\ln2-1\cancel{\ln1}\right)\\&=4\times2\ln2-3\ln3-2\ln2\\&=6\ln2-3\ln3\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\int_1^3 \left[f(x) - (x+2) \right] dx = 6\ln 2 - 3\ln 3}$$

A titre de vérification (partielle), on constate que la valeur obtenue est positive (elle se récrit $3\ln\frac{4}{3}$), ce à quoi on pouvait s'attendre puisque l'on intègre entre deux bornes rangées dans l'ordre croissant une fonction, *g*, qui est à valeurs strictement positives.

D'un point de vue géométrique, cette intégrale correspond à l'aire, en cm² (puisque l'unité graphique est de 1 cm sur chaque axe), du domaine limité par :

- La courbe (C) ;
- La droite (D) ;
- Les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.