La Réunion – Juin 2007 – Série S – Exercice

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a<b$.
On désigne par A et B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

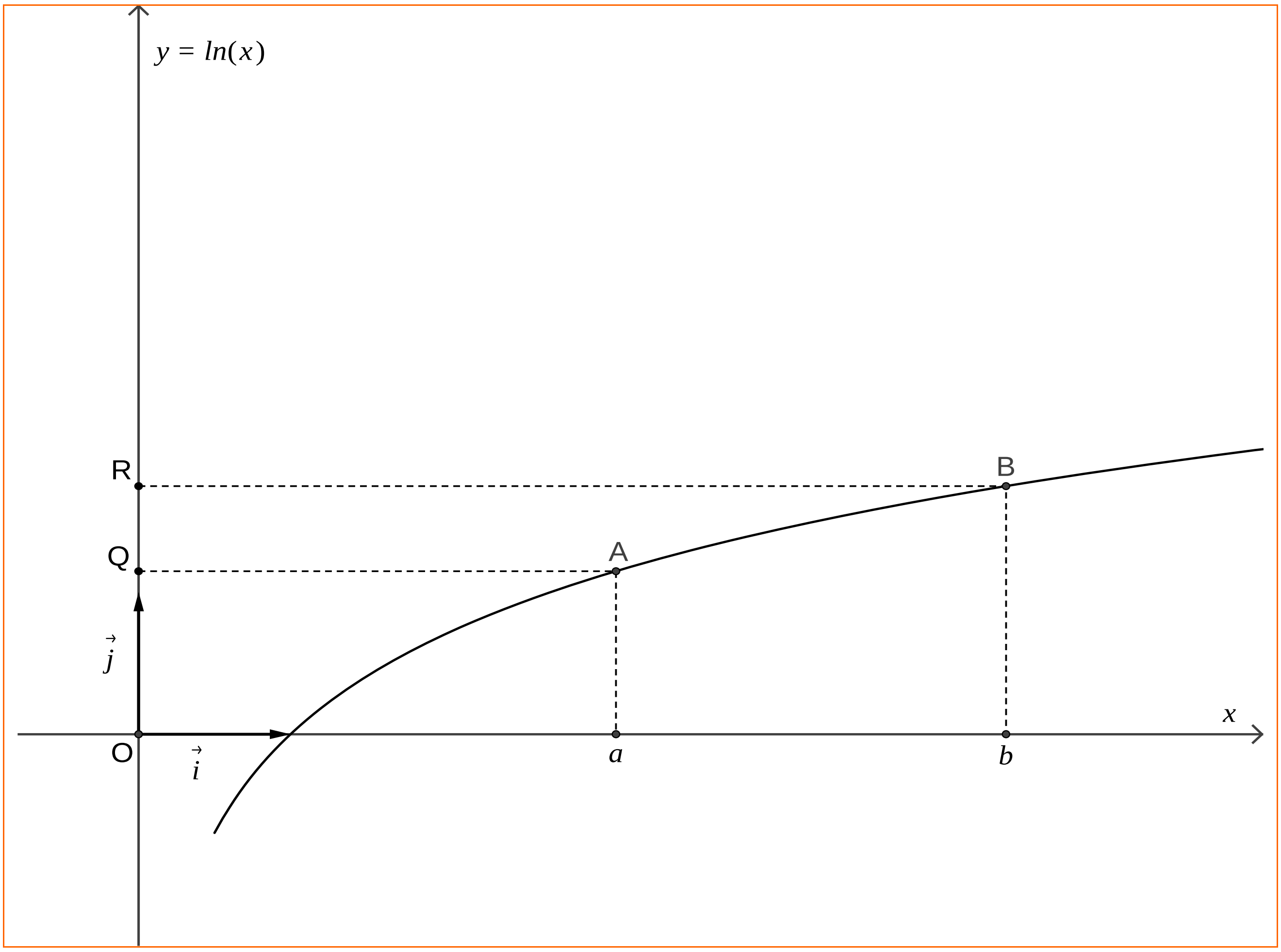
1. a. Donner l'équation réduite de la tangente $\left(\mathrm{T}\right)$ au point A à la courbe Γ.

   b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de $\left(\mathrm{T}\right)$ avec l'axe des ordonnées.
   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de $\left(\mathrm{T}\right)$; la réaliser sur la figure en annexe.

2. **Restitution organisée des connaissances.**

   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $\left(x\,;y\right)$ de nombres réels strictement positifs, on a : $\ln\left(xy\right)=\ln\left(x\right)+\ln\left(y\right)$ »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(m\right)$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe (on laissera les traits de construction apparents).


$y = ln(x)$
R
Q
B
A
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
a
b
x

Analyse

Fonction logarithme népérien et géométrie (assez élémentaire …) sont au menu de cet exercice dont l'objectif principal (questions 2 et 3) est la construction graphique de la moyenne géométrique de deux réels strictement positifs ($\sqrt{ab}$). Cette construction s'appuie sur le résultat classique suivant : le logarithme népérien de la moyenne géométrique de deux réels strictement positifs ($\ln\sqrt{ab}$) est égal à la moyenne arithmétique de leurs logarithmes népériens ($\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$).
La première question conduit à une construction simple de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien en un point donné de cette courbe.

Résolution

Question 1.a.

La fonction logarithme népérien admettant la fonction inverse comme dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a=\frac{1}{a}x-1+\ln a$$

$$\boxed{y=\frac{1}{a}x-1+\ln a}$$

Question 1.b.

Pour obtenir l'ordonnée de P, que nous notons y_{P}, on utilise l'équation précédente avec $x=0$. On obtient immédiatement :

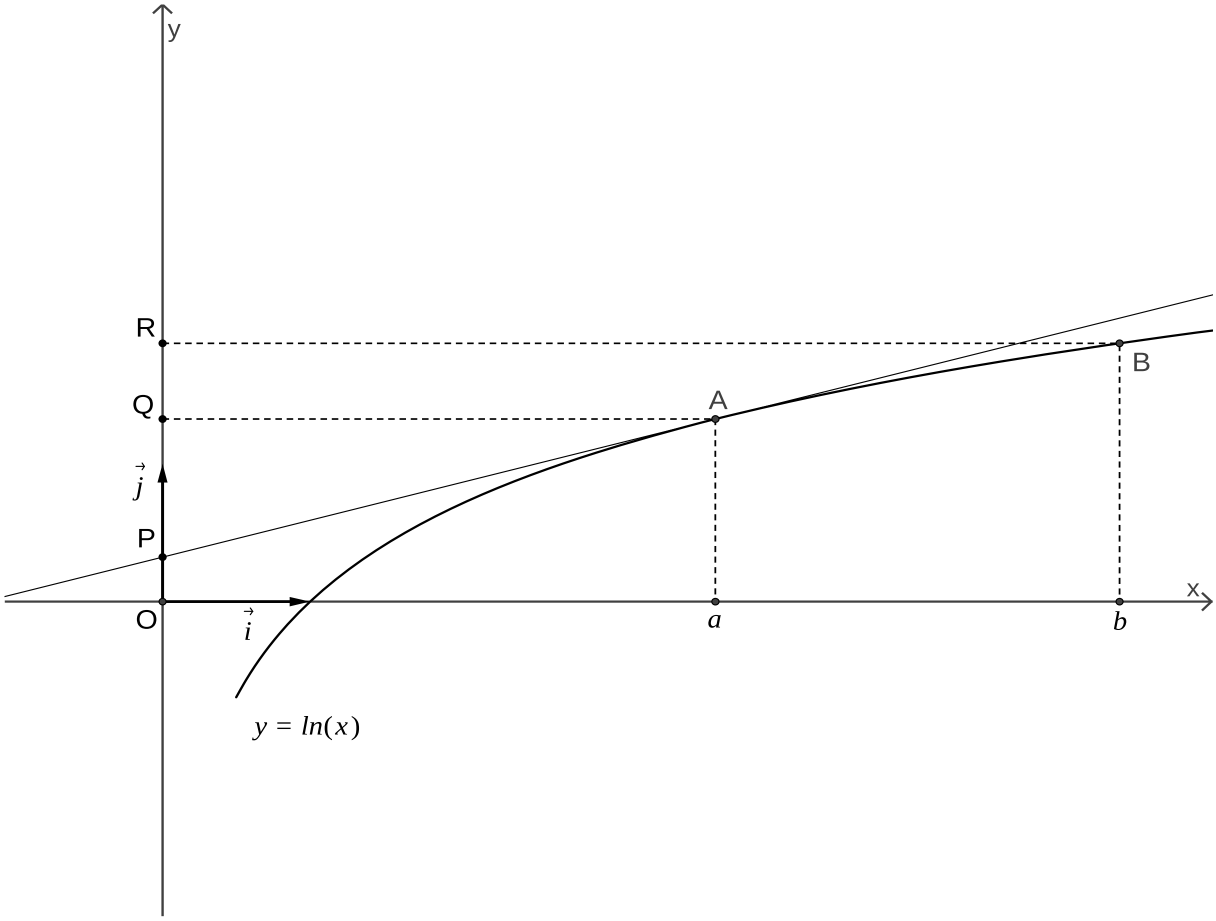
$$\boxed{y_{\mathrm{P}}=-1+\ln a}$$

Le point A admet pour coordonnées $(a\,;\ln a)$. Le point Q admet donc comme coordonnées $(x_{\mathrm{Q}}\,;y_{\mathrm{Q}})=(0\,;\ln a)$. La distance PQ est donc donnée par :

$$\mathrm{PQ}=\left|y_{\mathrm{Q}}-y_{\mathrm{P}}\right|=\left|\ln a+1-\ln a\right|=1$$

$$\boxed{\mathrm{PQ}=1}$$

On a : $y_{\text{P}} = -1 + \ln a < \ln a = y_{\text{Q}}$. Le point Q étant donné, on place donc le point P sur l'axe des ordonnées *sous* le point Q à une distance d'une unité (en d'autres termes, on a $\overrightarrow{\text{PQ}} = \vec{j}$).
La droite (PA) est la tangente cherchée (cf. la figure ci-dessous).



Question 2.

Pour tout nombre réel *m* strictement positif, on a, d'après la propriété rappelée :

$$\ln m = \ln\left(\sqrt{m}^2\right) = \ln\left(\sqrt{m} \times \sqrt{m}\right) = \ln\sqrt{m} + \ln\sqrt{m} = 2 \times \ln\sqrt{m}$$

On en déduit immédiatement le résultat demandé :

$$\ln\sqrt{m} = \frac{1}{2}\ln m$$

Pour tout réel *m* strictement positif, on a :

$$\ln\sqrt{m} = \frac{1}{2}\ln m$$

Question 3.

On cherche à placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$.

D'après la deuxième question : $\ln\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. Ainsi, on peut considérer, sur la courbe représentative du logarithme népérien, le point C d'abscisse $\sqrt{ab}$ et d'ordonnée $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. Les points Q et R admettent respectivement pour coordonnées $(0\,;\ln a)$ et $(0\,;\ln b)$, si nous notons S leur milieu, on a immédiatement : $S\left(0\,;\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)\right)$. Ainsi, pour obtenir le point C, il nous suffit de construire le milieu S des points Q et R puis de considérer l'intersection de la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$ (il s'agit de la perpendiculaire à l'axe des ordonnées en S) avec la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. Une fois le point C ainsi obtenu, on considère la droite verticale d'équation $x = \sqrt{ab}$ qui est la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par C. Elle coupe cet axe au point G cherché (cf. la figure ci-dessous).