Métropole – Juin 2011 – Série ES – Exercice

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[0,1;10]$ par :

$$B(x)=10\times\frac{1+\ln x}{x}$$

Si $B(x)$ est positif il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

1. Caroline utilise un logiciel de calcul formel. A plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

(Commande) $\mathrm{B}(\mathrm{x}):=10*((1+\ln(\mathrm{x}))/\mathrm{x})$	
(Réponse 1)	$x->10*\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$
(Commande) dériver$(\mathrm{B}(\mathrm{x}),\mathrm{x})$	
(Réponse 2)	$\frac{10}{x^2}+\frac{10*(1+\ln(x))*(-1)}{x^2}$
(Commande) résoudre$(\mathrm{B}(\mathrm{x})=0,\mathrm{x})$	
(Réponse 3)	$[\exp(-1)]$
(Commande) résoudre$(\mathrm{B}(\mathrm{x})>0,\mathrm{x})$	
(Réponse 4)	$[x>\exp(-1)]$
(Commande) maximum$(\mathrm{B}(\mathrm{x}),[0,1;10])$	
(Réponse 5)	10

   a. Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

   b. Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en termes de résultat mensuel pour l'entreprise.

2. **a.** Démontrer qu'une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[0,1;10]$ est la fonction F définie sur $[0,1;10]$ par :

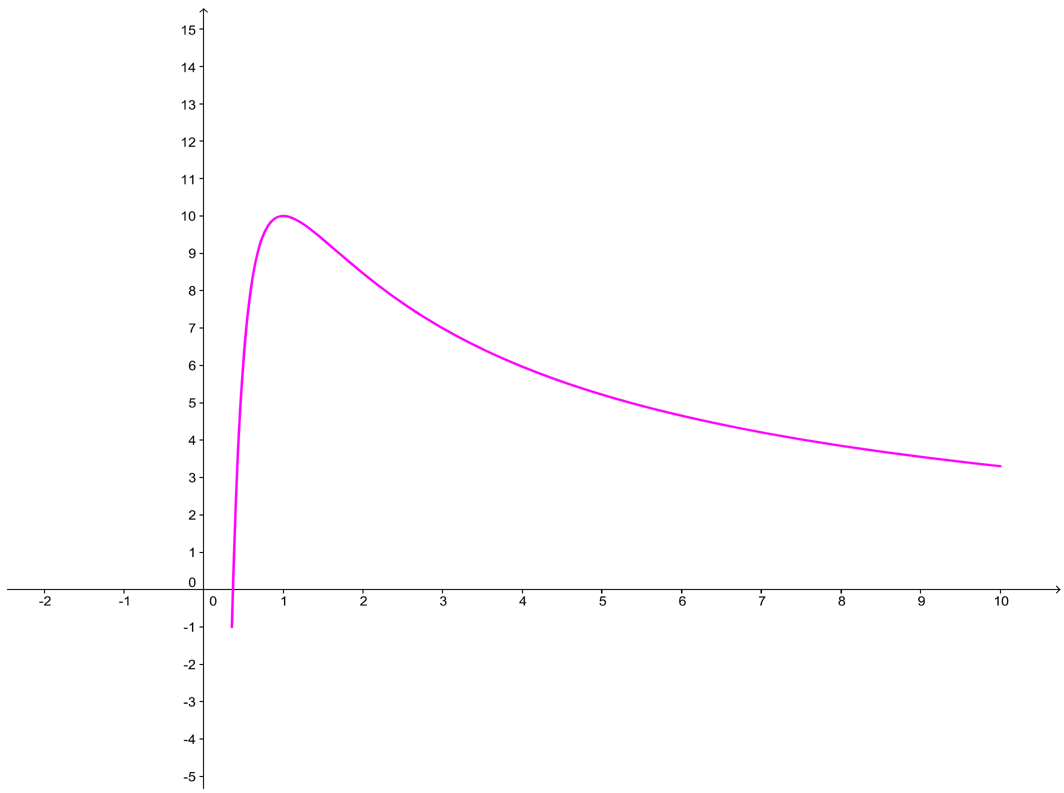
$$F(x)=5\ln x(\ln x+2)$$

b. Calculer $\int_{0,5}^{1,5} B(x)dx$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Ce nombre représente le bénéfice mensuel moyen en milliers d'euros lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois un nombre d'objets compris entre 50 et 150.

c. Pour quel nombre d'objets le bénéfice mensuel B est-il maximal ? Justifier la réponse par un calcul.

Annexe à rendre avec la copie



Analyse

Ca y est ! L'informatique « débarque » très clairement dans un exercice de baccalauréat ! Evidemment, ceci est en accord avec l'introduction de l'algorithmique dans les nouveaux programmes … Pour autant, l'énoncé de l'exercice proposé reste très « lisible » et aucune difficulté substantielle n'apparaît vraiment au-delà d'éventuelles notations liées à l'écriture informatique (par exemple : symbole « * » utilisé à la place du classique « × » de la multiplication). Autre remarque (et autre message !) : l'exercice n'est pas purement mathématique puisque le cadre en est l'étude du bénéfice lié à la production d'une entreprise. Ainsi, on retrouve ce qui a toute chance d'être désormais une « trilogie classique » dans les sujets de mathématiques de la série ES : cadre économique/modélisation mathématique/exploitation du modèle mathématique via l'outil informatique. On insiste donc davantage sur l'utilisation effective des mathématiques via l'outil informatique. Elle revêtent ainsi une dimension nettement plus opérationnelle …
Pourquoi pas ?

Résolution

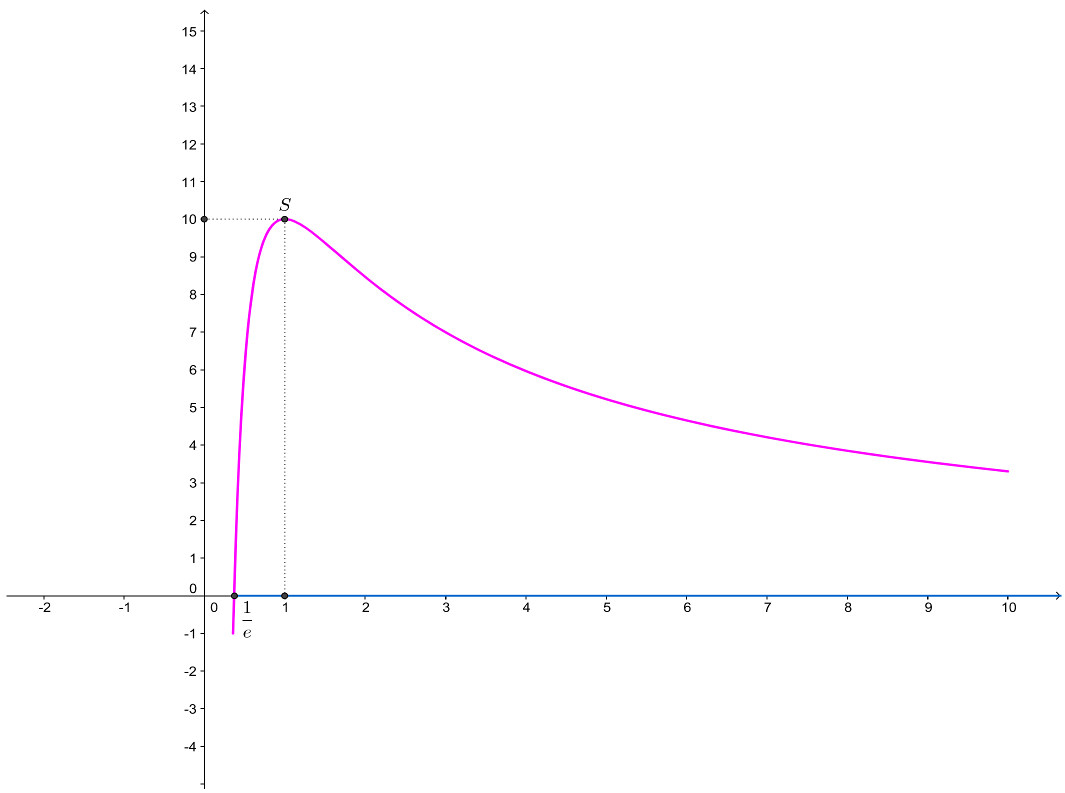
Question 1.a.

Dans sa troisième demande, Caroline recherche les solutions de l'équation $B(x)=0$. Le logiciel lui renvoie la valeur $e^{-1}=\frac{1}{e}$ qui est donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction *B* et de l'axe des abscisses.

Dans sa quatrième demande, Caroline recherche les solutions de l'inéquation $B(x)>0$. Le logiciel lui renvoie l'intervalle $\left]e^{-1}\,;+\infty\right[=\left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$. Les points correspondants de la courbe représentative de la fonction *B* sont situés au-dessus de l'axe des abscisses.

Dans sa cinquième demande, Caroline recherche la valeur maximale prise par la fonction B sur l'intervalle $[0{,}1\,;10]$. Le logiciel lui renvoie la valeur 10 : c'est l'ordonnée du point maximum de la courbe représentative de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}1\,;10]$.

Sur la figure de la page suivante, nous avons illustré ces trois résultats : matérialisation du point d'intersection de la courbe représentative de la fonction B avec l'axe des abscisses (point d'abscisse e^{-1}), matérialisation du sommet *S* d'ordonnée 10, valeur maximale de la fonction *B* sur l'intervalle $[0{,}1\,;10]$ et, enfin, matérialisation (en bleu) de la partie de l'axe des abscisses correspondants aux points d'abscisses strictement supérieures à e^{-1}.



Question 1.b.

On s'intéresse ici à l'équation $B(x)=0$ sur l'intervalle $[0,1;10]$.

On a :

$$B(x)=0$$
$$\Leftrightarrow 10\times\frac{1+\ln x}{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 1+\ln x=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=e^{-1}$$

Comme $e^{-1}\in[0,1;10]$, il s'agit bien de la solution de l'équation $B(x)=0$ sur cet intervalle.

Comme $e^{-1}=\frac{1}{e}\simeq 0,37$ (valeur arrondie à 10^{-2} et il s'agit d'une valeur arrondie par excès) on en déduit que pour une production de 37 objets, le bénéfice réalisé est pratiquement nul.

La fonction B s'annule sur l'intervalle $[0,1;10]$ pour $x=e^{-1}$.
Pour une production de 37 objets, le bénéfice réalisé est pratiquement nul.

Question 2.a.

On considère la fonction F définie sur $[0,1;10]$ par $F: x \mapsto 5\ln x(\ln x+2)$.
Elle est dérivable sur $[0,1;10]$ comme produit de fonctions définie et dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel dans $[0,1;10]$, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) = 5\ln x(\ln x+2) &= 5\left[\frac{1}{x}\times(\ln x+2)+\ln x\times\frac{1}{x}\right] \\ &= 5\frac{\ln x+2+\ln x}{x} = 5\frac{2\ln x+2}{x} = 10\frac{\ln x+1}{x} \\ &= B(x) \end{aligned}$$

La fonction F est bien une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[0,1;10]$.

La fonction F définie sur l'intervalle $[0,1;10]$ par $F: x \mapsto 5\ln x(\ln x+2)$
est une primitive de la fonction B sur cet intervalle.

Question 2.b.

Comme l'intervalle $[0,5;1,5]$ est inclus dans l'intervalle $[0,1;10]$, on peut utiliser la primitive de B obtenue à la question précédente et il vient :

$$\begin{aligned} \int_{0,5}^{1,5} B(x)\,dx &= \left[5\ln x(\ln x+2)\right]_{0,5}^{1,5} \\ &= 5\ln 1,5(\ln 1,5+2)-5\ln 0,5(\ln 0,5+2) \\ &= 5\left\{\left[(\ln 1,5)^2-(\ln 0,5)^2\right]+2(\ln 1,5-\ln 0,5)\right\} \\ &= 5\left[(\ln 1,5-\ln 0,5)(\ln 1,5+\ln 0,5)+2(\ln 1,5-\ln 0,5)\right] \\ &= 5(\ln 1,5-\ln 0,5)(\ln 1,5+\ln 0,5+2) \\ &= 5\ln\frac{1,5}{0,5}\left(\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}+2\right) \\ &= 5\ln 3(\ln 3-2\ln 2+2) \\ &\simeq 9,406 \end{aligned}$$

$$\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,dx = 5\ln 3(\ln 3-2\ln 2+2) \simeq 9,406$$

Le bénéfice mensuel moyen réalisé par l'entreprise pour une production comprise entre 50 et 150 unités est égal à environ 9 406 euros.

Question 2.c.

La fonction B est dérivable sur $[0,1;10]$ comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout x réel dans $[0,1;10]$:

$$B'(x)=10\frac{\frac{1}{x}\times x-(\ln x+1)\times 1}{x^2}=10\frac{1-\ln x-1}{x^2}=-10\frac{\ln x}{x^2}$$

Remarque : l'expression renvoyée par le logiciel de calcul formel diffère substantiellement mais on a :

$$\frac{10}{x^2}+\frac{10(1+\ln x)\times(-1)}{x^2}=10\frac{1-(1+\ln x)}{x^2}=10\frac{-\ln x}{x^2}=B'(x)$$

Le logiciel de calcul formel considère en fait la fonction B sous la forme :

$$B(x)=10\times(1+\ln x)\times\frac{1}{x}$$

Il dérive ensuite un produit :

$$B'(x)=10\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+10\times(1+\ln x)\times\frac{-1}{x^2}=\frac{10}{x^2}+\frac{10\times(1+\ln x)\times(-1)}{x^2}$$

Revenons à l'étude du signe de $B'(x)$.

Comme $-\frac{10}{x^2}$ est strictement négatif sur l'intervalle $[0,1;10]$, le signe de $B'(x)$ est l'opposé du signe de $\ln x$. On a donc immédiatement :

- Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1;1[$, on a $\ln x<0$ et $B'(x)>0$.
- $B'(1)=0$.
- Pour tout réel x de l'intervalle $]1;10]$, on a $\ln x>0$ et $B'(x)<0$.

La fonction B est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0,1;1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;10]$. Elle admet donc un maximum pour $x=1$ et ce maximum vaut : $B(1)=10\times\frac{1+\cancel{\ln 1}}{1}=10$.

Remarque : ce résultat est en accord avec la 5ème réponse renvoyée par le logiciel de calcul formel.

Le bénéfice réalisé par l'entreprise pour une production comprise entre 10 et 1 000 objets sera maximal lorsque cette production sera de 100 objets.
La valeur du bénéfice est alors de 10 000 euros.