

Polynésie – Série S – Juin 2002 - Exercice

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$, et on note δ le PGCD de α et β .
 - a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ .
 - b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $(n-2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n$$

$$b = 2n^2 - n - 1$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4. On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$.
 - a. Montrer que δ divise d , puis que $\delta = d$.
 - b. En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n .
 - c. *Application* : Déterminer Δ pour $n = 2001$.
Déterminer Δ pour $n = 2002$

Analyse

Cet exercice d'arithmétique passe en revue de nombreuses notions et résultats relatifs aux nombres premiers et à la notion de PGCD.

Résolution

→ *Question 1.*

La division euclidienne de $2n+1$ par n s'écrit : $2n+1 = 2 \times n + 1$ puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 (1 et donc bien le reste).

Dans ces conditions : $\text{PGCD}(2n+1, n) = \text{PGCD}(n, 1) = 1$.

Les entiers n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

→ *Question 2.a.*

On a : $2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1) = 2n+6-2n-1 = 5$.

Puisque δ est le PGCD de α et β , il les divise et divise donc $2\alpha - \beta$.

δ est donc un diviseur de 5 qui n'admet comme seuls diviseurs entiers naturels que 1 et 5.

Les deux valeurs possibles de δ sont donc 1 et 5.

→ *Question 2.b.*

Supposons que α et β soient deux multiples de 5.

En particulier $\alpha = n+3$ est un multiple de 5 non nul ($n \geq 2$).

On a : $n-2 = (n+3) - 5 = \alpha - 5$.

α étant un multiple de 5, il en va de même pour $\alpha - 5$.

$n-2$ est bien un multiple de 5.

Remarque : on constate, dans cette première partie de la démonstration que nous n'avons pas utilisé le fait que β était un multiple de 5.

Réciproquement, supposons maintenant que $n-2$ soit un multiple de 5.

On peut écrire : $n-2 = 5k$ où k est un entier naturel.

On a : $\alpha = n + 3 = (n - 2) + 5 = 5k + 5 = 5(k + 1)$ et

$$\beta = 2n + 1 = 2(n - 2) + 4 + 1 = 2(n - 2) + 5 = 2 \times 5k + 5 = 5(2k + 1)$$

α et β sont bien deux multiples de 5.

α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $(n - 2)$ est multiple de 5.

→ *Question 3.*

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n$$

En mettant immédiatement n en facteur, il vient : $a = n^3 + 2n^2 - 3n = n(n^2 + 2n - 3)$

Considérons maintenant la fonction polynôme f du second degré définie par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Déterminons les éventuelles valeurs de x qui annulent f .

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16.$$

On obtient facilement les deux valeurs : $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$.

D'où, le coefficient de x^2 étant égal à 1 : $f(x) = (x - 1)(x + 3)$.

Finalement :

$$\boxed{a = n(n - 1)(n + 3)}$$

$$b = 2n^2 - n - 1$$

On procède de façon analogue à ce qui précède en posant : $g(x) = 2x^2 - x - 1$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9.$$

On obtient facilement les deux valeurs : $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.

D'où, le coefficient de x^2 étant égal à 2 : $g(x) = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$

Finalement :

$$\boxed{b = (n - 1)(2n + 1)}$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, les nombres $n-1$, $n+3$ et $2n+1$ sont des entiers naturels. On en déduit que a et b sont des entiers naturels.

Puisqu'ils s'écrivent sous forme de produits comprenant le facteur $n-1$, on en conclut finalement :

Les nombres a et b sont deux entiers naturels divisibles par $n-1$.

→ *Question 4.a.*

Soit $d = \text{PGCD}(n(n+3); 2n+1)$.

A la question 2, on a posé : $\delta = \text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(n+3; 2n+1)$.

δ divise $n+3$, donc δ divise $n(n+3)$.

Donc δ est un diviseur commun à $n(n+3)$ et $2n+1$.

En tant que diviseur commun à $n(n+3)$ et $2n+1$, δ divise leur PGCD (propriété du cours : tout diviseur commun à deux entiers divise leur PGCD), c'est à dire : δ divise d .

Montrons maintenant que δ est égal à d .

Les nombres n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Bezout, il existe donc deux entiers u et v tels que :

$$un + v(2n+1) = 1 \quad (1)$$

δ est le PGCD de $n+3$ et $2n+1$.

D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers U et V tels que :

$$U(n+3) + V(2n+1) = \delta \quad (2)$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient :

$$(un + v(2n+1))(U(n+3) + V(2n+1)) = \delta$$

D'où :

$$\underbrace{uU}_{\text{entier}} n(n+3) + \underbrace{(unV + vU + vV(2n+1))}_{\text{entier}} (2n+1) = \delta$$

Cette égalité entraîne que δ est un multiple du PGCD des nombres $n(n+3)$ et $2n+1$, c'est à dire de d . D'où : d divise δ .

Les nombres d et δ se divisant l'un l'autre, ils sont égaux.

$$d = \delta$$

→ *Question 4.b.*

D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a,b) &= \text{PGCD}(n(n-1)(n+3), (n-1)(2n+1)) \\ &= (n-1) \times \text{PGCD}(n(n+3), (2n+1)) \\ &= (n-1) \times d \\ &= (n-1) \times \delta\end{aligned}$$

A la question 2.a., on a vu que δ ne pouvait prendre que les valeurs 1 et 5.

Par ailleurs, à la question 2.b., on a vu que $n+3$ et $2n+1$ étaient des multiples de 5 si, et seulement si, $n-2$ était un multiple de 5.

On déduit de ce qui précède : $\delta = 5$ si, et seulement si, $n-2$ est un multiple de 5.

D'où : $\delta = 5$ si, et seulement si, $n \equiv 2[5]$.

Finalement :

$$\text{Si } n \equiv 2[5] \text{ alors } \Delta = \text{PGCD}(a,b) = 5(n-1). \text{ Sinon } \Delta = \text{PGCD}(a,b) = n-1.$$

→ *Question 4.c.*

Pour $n = 2001$, on a :

$$a = n(n-1)(n+3) = 2001 \times 2000 \times 2004 = 8020008000 \text{ et}$$

$$b = (n-1)(2n+1) = 2000 \times 4003 = 8006000.$$

Comme $2001 \equiv 1[5]$, il vient : $\Delta = n-1 = 2000$.

$$\text{Pour } n = 2001, \Delta = 2000.$$

Pour $n = 2002$, on a :

$$a = n(n-1)(n+3) = 2002 \times 2001 \times 2005 = 8032034010 \text{ et}$$

$$b = (n-1)(2n+1) = 2001 \times 4005 = 8014005.$$

Comme $2002 \equiv 2[5]$, il vient : $\Delta = 5(n-1) = 5 \times 2001 = 10005$.

Pour $n = 2002$, $\Delta = 10005$.