

Amérique du sud – Novembre 2002 – Série S - Exercice

On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = 111\dots 11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1).

On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

(0,5 Point)

2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste. (0,5 point)

Soit a_n et a_p deux termes de la suite ayant le même reste ($n < p$).

Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?

(0,5 point)

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.
Démontrer l'égalité : $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$. (1 point)

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10. (0,5 point)

Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$ alors 2001 divise a_{m-k} . (1 point)

5. Démontrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001. (1 point)

Analyse

Un joli exercice d'arithmétique où les principaux résultats du cours relatifs à la division euclidienne et aux nombres premiers sont requis.

Résolution

→ *Question 1.*

Puisque l'écriture décimale de a_n comporte n fois le chiffre 1, nous pouvons immédiatement écrire :

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{n-2} + 10^{n-1} \\ &= 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{n-2} + 10^{n-1}\end{aligned}$$

Le terme a_n apparaît ainsi comme la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 10.

On a alors (cf. cours : pour q réel différent de 1 : $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$) :

$$a_n = 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{n-2} + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.

→ *Question 2.*

Dans la division euclidienne par 2001, on peut obtenir 2001 restes : 0, 1, 2, 3, ..., 2000.

Ainsi, si on considère un total de 2002 entiers (les 2002 premiers termes de la suite (a_n)), on obtiendra, en effectuant la division euclidienne de ces entiers par 2001, un total de 2002 restes. Puisqu'ils ne peuvent prendre « que » 2001 valeurs, 2 au moins sont nécessairement égaux.

Parmi les 2002 premiers termes de la suite (a_n) , au moins deux admettent le même reste dans la division euclidienne par 2001.

Soit le r reste commun à a_n et a_p dans la division par 2001. On peut alors écrire :

$$a_n = 2001q_n + r \text{ et } a_p = 2001q_p + r$$

On en tire alors, en soustrayant ces deux égalités membre à membre :

$$a_p - a_n = 2001(q_p - q_n)$$

$a_p - a_n$ est donc divisible par 2001. Soit :

Le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 est donc nul.

→ *Question 3.*

Soit k et m deux entiers strictement positifs tels que $k < m$.

D'après la question 1 :

$$a_m - a_k = \frac{10^m - 1}{9} - \frac{10^k - 1}{9} = \frac{10^m - 10^k}{9} = \frac{10^k \times (10^{m-k} - 1)}{9} = \frac{10^{m-k} - 1}{9} \times 10^k$$

Comme $k < m$, on a (toujours d'après la question 1) : $\frac{10^{m-k} - 1}{9} = a_{m-k}$. Le résultat est ainsi démontré.

Pour tout k et m entiers strictement positifs tels que $k < m$, on a :

$$a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$$

→ *Question 4.*

Les diviseurs (entiers naturels) premiers de 10 sont 1, 2 et 5. Ni 2, ni 5 ne divise 2001. On en tire immédiatement que 10 et 2001 sont premiers entre eux :

$$PGCD(10; 2001) = 1$$

Comme $PGCD(10; 2001) = 1$ alors pour tout entier naturel k : $PGCD(10^k; 2001) = 1$.

Supposons alors que 2001 divise $a_m - a_k$.

D'après la question 3, ceci équivaut à dire que 2001 divise $a_{m-k} \times 10^k$.

Mais comme nous venons d'établir que 2001 et 10^k sont premiers entre eux, on en déduit (théorème de Gauss) que 2001 divise a_{m-k} .

Si 2001 divise $a_m - a_k$ alors 2001 divise a_{m-k} .

→ *Question 5.*

D'après la question 2, on sait que parmi les 2002 premiers termes de la suite (a_n) deux, au moins, admettent le même reste dans la division euclidienne par 2001. Notons a_k et a_m ($k < m$) ces deux termes.

Toujours d'après la question 2, nous pouvons alors affirmer que 2001 divise $a_m - a_k$.

La question 4 nous permet alors de conclure que 2001 divise le terme a_{m-k} . On a ainsi démontré qu'au moins un terme de la suite (a_n) était divisible par 2001.

Au moins un terme de la suite (a_n) est divisible par 2001.