

Partie A : Restitution organisée des connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p , alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel pair n non nul, u_n est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) .

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
 - a. Montrer que :
$$6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p} \text{ et } 6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}.$$
 - b. En déduire que $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
 - c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

Analyse

Divisibilité et congruences sont les ingrédients essentiels de cet exercice. Au-delà de la restitution organisée des connaissances (Attention ! La démonstration demandée est très classique et doit être connue !) et des premières questions de la partie B, c'est la question 5 qui s'avère être la plus délicate et ... la plus intéressante même si, là encore, elle fait essentiellement appel à quelques propriétés fondamentales des congruences.

Résolution

Partie A : Restitution organisée des connaissances

Rappelons le théorème de Gauss :

Si a , b et c sont trois entiers relatifs non nuls tels que a divise le produit bc en étant premier avec b alors a divise c .

Comme a et b sont premiers entre eux, le théorème de Bézout nous permet d'affirmer qu'il existe deux entiers u et v tels que l'on a :

$$au + bv = 1$$

Il vient alors : $(au + bv)c = c$, soit : $auc + bvc = c$.

Comme a divise le produit bc , il existe un entier k tel que : $bc = ka$. L'égalité précédente se réécrit alors : $auc + vka = c$, soit : $a(uc + vk) = c$. a divise bien c .

Partie B

Question 1.

On a facilement :

$$\begin{aligned}u_1 &= 2^1 + 3^1 + 6^1 - 1 = \boxed{10} \\u_2 &= 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = \boxed{48} \\u_3 &= 2^3 + 3^3 + 6^3 - 1 = \boxed{250} \\u_4 &= 2^4 + 3^4 + 6^4 - 1 = \boxed{1\,392} \\u_5 &= 2^5 + 3^5 + 6^5 - 1 = \boxed{8\,050} \\u_6 &= 2^6 + 3^6 + 6^6 - 1 = \boxed{47\,448}\end{aligned}$$

$u_1 = 10, u_2 = 48, u_3 = 250, u_4 = 1\,392, u_5 = 8\,050 \text{ et } u_6 = 47\,448.$

Question 2.

Comme 2 et 6 sont pairs et que n est un entier naturel non nul, on en déduit immédiatement que 2^n et 6^n sont deux entiers pairs. Il en va de même pour leur somme.

Ainsi, u_n est pair si, et seulement si, $3^n - 1$ est pair.

Or, toute puissance d'exposant un entier naturel d'un entier impair est impaire (on retrouve rapidement ce résultat en considérant $(2k+1)^n$ et en utilisant la formule du binôme de

Newton). Ainsi, 3^n est un entier impair et $3^n - 1$ est un entier pair.

Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

Question 3.

On veut montrer ici que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4 \mid u_{2n}$.

Pour tout entier naturel pair n non nul, on a : $2^{2n} + 6^{2n} = 4^n + 36^n = 4^n (1 + 9^n)$.

L'entier n étant non nul, on en déduit ainsi que $2^{2n} + 6^{2n}$ est divisible par 4.

Intéressons-nous désormais à : $3^{2n} - 1$.

On a immédiatement : $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$.

Il vient alors, pour tout entier naturel n : $(3^2)^n = 3^{2n} \equiv 1^n \pmod{4}$, c'est-à-dire :

$3^{2n} \equiv 1 \pmod{4}$.

En définitive $3^{2n} - 1$ est divisible par 4.

$2^{2n} + 6^{2n}$ et $3^{2n} - 1$ étant divisibles par 4 pour tout entier naturel n non nul, il en va de même pour leur somme, c'est-à-dire u_{2n} .

Pour tout entier naturel n non nul, u_{2n} est divisible par 4.

Question 4.

2 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise tous les termes (donc au moins un !) de la suite (u_n) .

3 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise u_2 : $u_2 = 48 = 3 \times 16$.

5 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise u_3 : $u_3 = 250 = 5 \times 50$.

7 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise u_5 : $u_5 = 8\,050 = 7 \times 1150$.

2, 3, 5 et 7 appartiennent à l'ensemble (E).

Question 5.a.

Soit p un entier premier strictement supérieur à 3.

Puisqu'il est premier, il est impair et donc premier avec 2. Le petit théorème de Fermat nous permet alors d'écrire : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Comme $p > 3$, on a $p-1 > 2 > 0$ et on peut écrire : $2 \times 2^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$.

D'où : $3 \times 2 \times 2^{p-2} \equiv 3 \times 1 \pmod{p}$, soit : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$.

Comme p est premier et strictement supérieur à 3 (c'est fondamentalement ici que cette hypothèse intervient), il est premier avec 3 et le petit théorème de Fermat nous donne :

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Comme précédemment, on peut alors écrire : $3 \times 3^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$.

D'où : $2 \times 3 \times 3^{p-2} \equiv 2 \times 1 \pmod{p}$, soit : $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

Pour tout entier premier strictement supérieur à 3, on a :
 $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

Question 5.b.

On a : $u_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$.

Donc : $6 \times u_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6 \times 6^{p-2} - 6 \times 1 = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$.

Comme (cf. la question précédente) : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, il vient :

$2^{p-1} \times 3^{p-1} \equiv 1 \times 1 \pmod{p}$, soit : $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On a donc : $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et, d'après la question précédente : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$
et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

On en tire alors : $6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} \equiv 3 + 2 + 1 \pmod{p}$.

D'où : $6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6 \equiv 6 - 6 \pmod{p}$, soit $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

Pour tout entier p premier strictement supérieur à 3, on a :
 $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

Question 5.c.

D'après la question précédente, l'entier premier p divise $6 \times u_{p-2}$.

Or, p étant premier et strictement supérieur à 3, il est premier différent de 2 et 3 et donc premier avec 6. Le théorème de Gauss nous permet alors d'affirmer que p divise u_{p-2} .

L'entier p étant premier et divisant le terme u_{p-2} de la suite (u_n) , il est élément de l'ensemble (E).

L'entier p appartient à l'ensemble (E).

Remarque : 2 et 3 sont éléments de (E) (question 4.) et tout entier premier p strictement supérieur à 3 étant également élément de (E), on en déduit que tout entier premier est élément de (E).