Antilles-Guyane – Juin 2005 – Série S – Exercice

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b. Démontrer alors que $2005^{2005} \equiv 7\left(9\right)$.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $10^n \equiv 1\left(9\right)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base 10, on appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\left(9\right)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = 2005^{2005}$; on désigne par :

- B la somme des chiffres de A ;
- C la somme des chiffres de B ;
- D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\left(9\right)$.

b. Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numérotation décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$.

c. Démontrer que $C \leq 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

Analyse

Dans cet exercice, on s'intéresse fondamentalement au reste de la division euclidienne de 2005^{2005} par 9.
Dans la première question, on obtient rapidement le résultat grâce aux congruences.
Dans les questions 2 et 3, on étudie une approche plus itérative (on dirait « algorithmique » désormais) en montrant que l'on peut étudier, dans la division par 9, la somme des chiffres du nombre plutôt que le nombre lui-même (cette démarche étant bien sûr valable parce que nous travaillons en base 10 !). La difficulté provient alors du fait que le nombre 2005^{2005} comporte un nombre très élevé de chiffres (6 620 exactement !) …

Résolution

Question 1.a.

On a immédiatement $7 \equiv 7\,(9)$, $7^2 = 49 \equiv 4\,(9)$, $7^3 \equiv 4\times 7 \equiv 1\,(9)$ et donc $7^4 \equiv 7\,(9)$.
Grâce à ces premiers calculs, il vient, pour tout entier naturel *k* :

- $7^{3k} = \left(7^3\right)^k \equiv 1^k\,(9)$, c'est-à-dire : $7^{3k} \equiv 1\,(9)$.
- $7^{3k+1} = 7^{3k}\times 7 \equiv 1\times 7\,(9)$, c'est-à-dire : $7^{3k+1} \equiv 7\,(9)$.
- $7^{3k+2} = 7^{3k}\times 7^2 \equiv 1\times 4\,(9)$, c'est-à-dire : $7^{3k+2} \equiv 4\,(9)$.

Comme les valeurs 1, 7 et 4 sont positives et strictement inférieures à 9, il vient :

Si *n* est un multiple de 3, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9 vaut 1.
Si le reste de la division euclidienne de *n* par 3 vaut 1, alors celui de la division euclidienne de 7^n par 9 vaut 7.
Enfin, si le reste de la division euclidienne de *n* par 3 vaut 2, alors celui de la division euclidienne de 7^n par 9 vaut 4.

Question 1.b.

On note d'abord que l'on a : $2005 = 9\times 222 + 7$. Soit $2005 \equiv 7\,(9)$.
D'où : $2005^{2005} \equiv 7^{2005}\,(9)$.

On a ensuite : $2005 = 9\times 222 + 7 = 3\times 666 + 3\times 2 + 1 = 3\times 668 + 1$ et on en déduit, d'après la question précédente : $7^{2005} \equiv 7\,(9)$.

Finalement : $2005^{2005} \equiv 7\,(9)$.

$$2005^{2005} \equiv 7\,(9)$$

Question 2.a.

Le résultat peut se montrer de diverses façons :

- A partir de $10 \equiv 1\,(9)$ qui entraîne $10^n \equiv 1^n\,(9)$.
- En écrivant : $10^n = \underbrace{999...9}_{n \text{ chiffres "9"}} + 1$.
- Par récurrence avec les congruences … (un peu « lourd »)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 10^n \equiv 1\,(9)$$

Remarque : résultat également valable pour $n = 0$.

Question 2.b.

Soit N un entier naturel.

On peut l'écrire, en base 10 : $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ où a_0, a_1 ..., a_n sont les chiffres de N, c'est-à-dire des entiers de $[\![0\,;9]\!]$ et n un entier naturel.

On a donc : $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = a_0 + a_1 \times 10 + ... + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_n \times 10^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k$.

Pour tout entier k non nul, on a, d'après la question précédente : $10^k \equiv 1\,(9)$ et donc $a_k \times 10^k \equiv a_k\,(9)$. Ainsi : $a_0 + a_1 \times 10 + ... + a_n \times 10^n \equiv a_0 + a_1 + ... + a_n\,(9)$, soit : $N \equiv S\,(9)$.

Si N est un entier naturel et si S désigne la somme de ses chiffres, alors $N \equiv S\,(9)$.

Question 2.c.

Par définition de la relation de congruence, $N \equiv S\,(9)$ signifie que N et S admettent le même reste dans la division euclidienne par 9.

Ainsi, si l'un de ces deux entiers est divisible par 9, son reste dans la division euclidienne par 9 sera nul et il en ira donc de même pour le deuxième qui sera bien divisible par 9.

N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.

Question 3.a.

D'après la question **2.b.** on a : $A \equiv B\,(9)$, $B \equiv C\,(9)$ et $C \equiv D\,(9)$.

On en déduit immédiatement par transitivité de la relation de congruence : $A \equiv D\,(9)$.

$$A \equiv D\,(9)$$

Question 3.b.

On a $2005 < 10\,000 = 10^4$. Donc, la fonction $x \mapsto x^{2005}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$A = 2005^{2005} < \left(10^4\right)^{2005} = 10^{8020}$.
L'écriture décimale de 10^{8020} est un « 1 » suivi de 8020 « 0 ». Comme $A < 10^{8020}$, il vient :
$A \leq \underbrace{99...9}_{8020 \text{ chiffres "9"}}$. Ainsi, A s'écrit avec au plus 8020 chiffres.

Le nombre $\underbrace{99...9}_{8020 \text{ chiffres "9"}}$ est, dans l'ensemble des nombres comportant au plus 8 020 chiffres dans leur écriture décimale, celui dont la somme des chiffres est la plus élevée. Or, on a
$\underbrace{9+9+...+9}_{8020 \text{ termes égaux à "9"}} = 8\,020 \times 9 = 72\,180$.
Finalement : $A \leq \underbrace{99...9}_{8020 \text{ chiffres "9"}} \Rightarrow B \leq 72\,180$.

A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffes
et B, la somme de ses chiffres, est inférieur ou égal à 78 120.

Question 3.c.

A la question précédente, nous avons vu que le nombre B était inférieur ou égal à 78 120. Son écriture décimale comporte donc au plus 5 chiffres. Or, dans l'ensemble des nombres comportant au plus 5 chiffres dans leur écriture décimale, celui dont la somme des chiffres est la plus élevée est : 99 999. La somme de ses chiffres vaut $9+9+9+9+9=45$. On a donc $C \leq 45$.

$C \leq 45$

Question 3.d.

On s'intéresse ici au nombre D, c'est-à-dire à la somme des chiffres du nombre C.
D'après la question précédente, on a : $C \leq 45$.

Supposons que le chiffre des dizaines de C soit 4. Alors la plus grande somme des chiffres sera obtenue pour $C = 45$ et vaut 9.

Supposons que le chiffre des dizaines de C soit 3. Alors la plus grande somme des chiffres sera obtenue pour $C = 39$ et vaut 12.

Pour tout autre chiffre des dizaines (0, 1 ou 2), on aura une somme des chiffres inférieure à 12 (le chiffre des unités valant au plus 9).

En définitive : $D \leq 12$.

$D \leq 12$

Question 3.e.

D'après la question **1.b.** on a $A \equiv 7\left(9\right)$ et d'après la question **3.a.** on a $A \equiv D\left(9\right)$.

Ainsi, $D \equiv 7\left(9\right)$. Or D est strictement positif (somme de chiffres). Il est donc de la forme $D = 9k + 7$ avec k entier naturel.
En tenant compte de la question précédente, il vient : $0 < 9k + 7 \leq 12$ et on en tire immédiatement $k = 0$ puis $D = 7$.

$$\boxed{D = 7}$$