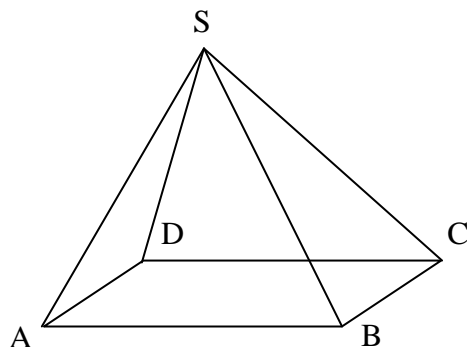


1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».



La fourmi se trouve en A.

- a) Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- En A ?
- En B ?
- En C ?
- En D ?

- b) Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note : S_n , l'événement : « La fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet événement.

Donner p_1 .

En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

2. On considère la suite (p_n) , définie pour tout entier naturel n strictement positif par :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$.

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Analyse

Cet exercice aborde le thème des chemins probabilistes. Il est conseillé, pour commencer, de choisir une notation cohérente pour désigner les probabilités demandées et mener les calculs requis (1^{ère} question). La deuxième question consiste en une étude de suite simplifiée.

Résolution

En guise de préambule, nous devons souligner que, du point de vue des probabilités, le passage d'un sommet de la pyramide vers un autre sommet via l'arête les liant, dépend du sommet de départ.

En effet, si la fourmi se trouve en S, elle peut faire un pas vers 4 autres sommets possibles : A, B, C et D. Pour chacun de ces pas, la probabilité qu'il soit réalisé est de $\frac{1}{4}$ puisqu'il y a équiprobabilité du choix du sommet d'arrivée.

Si, en revanche, la fourmi se trouve sur l'un des 4 sommets A, B, C ou D, alors elle ne peut faire un pas « que » vers 3 autres sommets. Dans ce cas, la probabilité de chacun de ces pas est de $\frac{1}{3}$.

→ Pour tenir compte de cette remarque, nous noterons désormais $p(A \rightarrow B)$ (par exemple) la probabilité d'aller du sommet A au sommet B en passant par l'arête liant les deux sommets.

Si nous souhaitons considérer un parcours (ou une partie d'un parcours) comportant plusieurs sommets, nous noterons, par exemple : $p(A \rightarrow B \rightarrow S)$, la probabilité d'aller du sommet A au sommet S en passant par le sommet B.

Les pas étant indépendants, on a, par exemple : $p(A \rightarrow B \rightarrow S) = p(A \rightarrow B) \times p(B \rightarrow S)$.

Question 1.a.

La fourmi se trouve en A.

→ Après deux pas, on souhaite que la fourmi soit à nouveau en A.

Les chemins possibles sont : $A \rightarrow B \rightarrow A$, $A \rightarrow D \rightarrow A$ et $A \rightarrow S \rightarrow A$.

Si nous notons $p(A)$ la probabilité cherchée, on a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \rightarrow B \rightarrow A) + p(A \rightarrow D \rightarrow A) + p(A \rightarrow S \rightarrow A) \\ &= p(A \rightarrow B)p(B \rightarrow A) + p(A \rightarrow D)p(D \rightarrow A) + p(A \rightarrow S)p(S \rightarrow A) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{11}{12} = \boxed{\frac{11}{36}} \end{aligned}$$

→ Après deux pas, on souhaite que la fourmi soit en B.

Le seul chemin possible est : $A \rightarrow S \rightarrow B$.

Si nous notons $p(B)$ la probabilité cherchée, on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \rightarrow S \rightarrow B) \\ &= p(A \rightarrow S) p(S \rightarrow B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

→ Après deux pas, on souhaite que la fourmi soit en C.

Les chemins possibles sont : $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow D \rightarrow C$ et $A \rightarrow S \rightarrow C$.

Si nous notons $p(C)$ la probabilité cherchée, on a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \rightarrow B \rightarrow C) + p(A \rightarrow D \rightarrow C) + p(A \rightarrow S \rightarrow C) \\ &= p(A \rightarrow B) p(B \rightarrow C) + p(A \rightarrow D) p(D \rightarrow C) + p(A \rightarrow S) p(S \rightarrow C) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{11}{12} = \boxed{\frac{11}{36}} \end{aligned}$$

Remarque : Au regard des chemins possibles et des probabilités qui leur sont associées, il est strictement équivalent, partant du sommet A de retourner en A ou d'aller en C. Ce résultat est exprimé dans l'égalité : $p(A) = p(C) = \frac{11}{36}$.

→ Après deux pas, on souhaite que la fourmi soit en D.

Comme ci-dessus, on peut remarquer que, partant de A et effectuant deux pas, les sommets B et D sont équivalents. Nous détaillons néanmoins les calculs.

Le seul chemin possible est : $A \rightarrow S \rightarrow D$.

Si nous notons $p(D)$ la probabilité cherchée, on a :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \rightarrow S \rightarrow D) \\ &= p(A \rightarrow S) p(S \rightarrow D) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

On a bien obtenu : $p(B) = p(D) = \frac{1}{12}$.

Question 1.b.

La fourmi se trouve toujours en A (cette hypothèse étant utilisée pour les deux questions 1.a. et 1.b.).

S_n est l'événement : « La fourmi est au sommet S après n pas » et p_n sa probabilité.

p_1 est donc la probabilité que la fourmi, partant de A, se rende en S. Comme la fourmi, en partant de A, peut atteindre trois sommets (B, D et S) de façon équiprobable, on a :

$$p_1 = \frac{1}{3}$$

Considérons maintenant l'événement S_{n+1} : « La fourmi est au sommet S après $n+1$ pas ». Pour que cet événement se produise, il est *nécessaire* que la fourmi *ne soit pas* en S après n pas (car alors au pas suivant, le $n+1$ ème, elle sera en A, B, C ou D). Or l'événement « La fourmi n'est pas en S après n pas » est simplement : $\overline{S_n}$. La condition nécessaire précédente s'écrit donc : $S_{n+1} \subset \overline{S_n}$, c'est à dire : $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$.

Il vient alors :

$$p_{n+1} = P(S_{n+1}) = P(S_{n+1} \cap \overline{S_n}) = P(S_{n+1} | \overline{S_n}) P(\overline{S_n}) = P(S_{n+1} | \overline{S_n}) (1 - P(S_n)) = P(S_{n+1} | \overline{S_n}) (1 - p_n)$$

Or $P(S_{n+1} | \overline{S_n})$ est la probabilité que la fourmi soit en S après $n+1$ pas sachant qu'elle n'est pas en S après n pas, c'est à dire sachant qu'elle est en A, B, C ou D après n pas. Or, la probabilité d'atteindre S en partant de A, B, C ou D vaut $\frac{1}{3}$.

Il vient donc, finalement :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$$

Question 2.a.

On considère la suite (p_n) , définie par :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

Pour $n = 1$, la formule précédente donne :

$$\frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^1 \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

On obtient bien la valeur de p_1 .

Supposons maintenant que la formule soit vraie au rang n . On a donc : $p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3} (1 - p_n) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) = \boxed{\frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie à l'ordre $n + 1$, ce qui achève la démonstration par récurrence.

On a donc, finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

Question 2.b.

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = 0 \text{ car } \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \right) = \frac{1}{4}$$

Soit, finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4}$$

En conclusion, lorsque la fourmi part du sommet A et effectue un nombre de pas « très grand », la probabilité qu'elle se retrouve au sommet de la pyramide est de $\frac{1}{4}$.