

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à trois), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
 - a. On suppose ici $n=10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée p_n , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.
 - a. On suppose ici $n=10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée q_n , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. a. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$$

- b. En remarquant que pour tout entier n , $n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 , on ait : $p_n - q_n < 10^{-3}$.
- c. Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Analyse

Cet exercice aborde le thème des chemins probabilistes. Il est conseillé, dans un premier temps, de choisir une notation cohérente pour désigner les probabilités demandées et mener les calculs requis (1^{ère} question). La deuxième question consiste en une étude de suite simplifiée.

Résolution

Question 1.a.

On tire deux billets simultanément dans l'urne.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2 puisqu'il y a exactement deux billets gagnants dans l'urne et ce, quel que soit le nombre total de billets.

On doit donc déterminer : $p(X=0)$, $p(X=1)$ et $p(X=2)$.

Le nombre total, N , de tirages possibles est le nombre de combinaisons de deux billets parmi 10 puisque la tirage est simultané. Il vient donc : $N = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \times 9}{2} = \frac{90}{2} = \boxed{45}$.

→ Calcul de $p(X=0)$

Le nombre de cas correspondant à cette situation est le nombre total de tirages simultanés de deux billets effectués parmi les 8 billets non gagnants, soit $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = \frac{56}{2} = \boxed{28}$.

Il vient donc :

$$p(X=0) = \frac{28}{45}$$

→ Calcul de $p(X=1)$

Obtenir un billet gagnant exactement correspond au tirage d'un billet gagnant parmi les deux et à celui d'un billet non gagnant parmi les 8. Le nombre total de cas correspondant à cette situation est donc de : $\binom{2}{1} \times \binom{8}{1} = 2 \times 8 = 16$.

Il vient donc :

$$p(X=1) = \frac{16}{45}$$

→ Calcul de $p(X=2)$

Un seul tirage fournit les deux billets gagnants.

Il vient donc :

$$p(X=2) = \frac{1}{45}$$

Finalement :

i	0	1	2
$p(X=i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

A titre de vérification, on peut calculer

$$p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \frac{28}{45} + \frac{16}{45} + \frac{1}{45} = \frac{45}{45} = 1. \text{ On obtient bien } 1.$$

Question 1.b.

On se place maintenant dans le cas général où l'urne contient n billets ($n \geq 3$).

Le nombre total N_n de tirages simultanés de 2 billets dans l'urne est de :

$$N_n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Tirer exactement un billet gagnant consiste à tirer un billet gagnant parmi les deux disponibles et un billet non gagnant parmi les $n-2$ billets non gagnants contenus dans l'urne. Le nombre de tirages correspondant à cette situation est donc : $\binom{2}{1} \binom{n-2}{1} = 2(n-2)$.

$$\text{La probabilité cherchée vaut donc : } p_n = \frac{2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}.$$

$$p_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

Question 2.a.

Dans la deuxième partie de l'exercice on traite d'une nouvelle expérience : après avoir tiré un premier billet, on le replace dans l'urne et on effectue un deuxième tirage indépendant du premier.

On suppose ici $n = 10$.

Puisqu'il y a remise (les répétitions sont donc possibles) et que les deux tirages sont indépendants, le nombre total de tirages possibles N_{10} est, cette fois, l'ensemble des 2-listes de l'ensemble des 10 billets disponibles. C'est à dire : $N_{10} = 10^2 = \boxed{100}$.

Ici encore, la variable aléatoire peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.

→ Calcul de $p(Y = 0)$

On n'obtient aucun billet gagnant si, pour chaque tirage, on obtient un billet non gagnant. C'est à dire si, pour chaque tirage, on tire le billet parmi les 8 billets non gagnants.

Le nombre de cas correspondant à cette situation est donc le nombre de 2-listes de l'ensemble des billets non-gagnants, ensemble qui comporte 8 éléments. Ce nombre est donc : $8^2 = 64$.

Il vient donc : $p(Y = 0) = \frac{64}{100} = \frac{16}{25} = 0,64$

$$p(Y = 0) = 0,64$$

→ Calcul de $p(Y = 1)$

Pour obtenir exactement un billet gagnant, il convient :

1. Soit de tirer un billet gagnant lors du premier tirage et un billet non gagnant lors du second ;
2. Soit de tirer un billet non gagnant lors du premier tirage et un billet gagnant lors du second.

Le nombre de cas correspondant à la première situation est : $\binom{2}{1} \times \binom{8}{1} = 2 \times 8 = 16$.

Il en va de même pour la deuxième situation.

Le nombre total de tirages de deux billets, avec remise, comportant exactement un billet gagnant est donc : $16 + 16 = 32$.

Il vient donc : $p(Y = 1) = \frac{32}{100} = \frac{8}{25} = 0,32$.

$$p(Y = 1) = 0,32$$

→ Calcul de $p(Y = 2)$

Pour obtenir deux billets gagnants, il convient, à chaque tirage, d'obtenir un billet gagnant. Puisqu'il y a remise, il y a deux possibilité à chaque tirage. Le nombre de cas correspondant à cette situation est donc : $2 \times 2 = 4$. C'est le nombre de 2-listes que l'on peut former à partir d'un ensemble comptant 2 éléments (l'ensemble des billets gagnants).

Il vient donc : $p(Y = 2) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 0,04$

$$p(Y = 2) = 0,04$$

Finalement :

i	0	1	2
$p(Y = i)$	0,64	0,32	0,04

A titre de vérification, on peut calculer :

$$p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) = 0,64 + 0,32 + 0,04 = 1.$$

On obtient bien 1.

Question 2.b.

On se place maintenant dans le cas général où l'urne contient n billets ($n \geq 3$).

Le nombre total N_n de tirages simultanés de 2 billets dans l'urne est le nombre de 2-listes de l'ensemble des billets qui compte n éléments :

$$N_n = \boxed{n^2}$$

Tirer exactement un billet gagnant consiste à :

1. Soit tirer un premier billet gagnant parmi les deux billets gagnants puis tirer un billet non gagnant parmi les $n - 2$ billets non gagnants ;
2. Soit tirer un premier billet non gagnant parmi les $n - 2$ billets non gagnants puis tirer un billet gagnant parmi les deux billets gagnants.

Le nombre de cas correspondant à chacune de ces deux situations (qui sont analogues) est

$$\text{donc : } \binom{2}{1} \times \binom{n-2}{1} = 2(n-2).$$

Le nombre total de tirage de deux billets ne comportant qu'un billet gagnant est donc :

$$2 \times 2(n-2) = 4(n-2).$$

La probabilité cherchée vaut donc :

$$q_n = \frac{4(n-2)}{n^2}$$

Question 3.a.

D'après les résultats précédents, obtenus pour $n \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned} p_n - q_n &= \frac{4(n-2)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2} = \frac{4(n-2)}{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{4(n-2)}{n} \times \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{4(n-2)}{n} \times \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 3, p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$$

Question 3.b.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, n-2 < n-1$.

On a donc : $\forall n \geq 3, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < \frac{4}{n^2}$.

Supposons alors qu'il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{4}{n^2} < 10^{-3}$. Comme $\forall n \geq 3, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < \frac{4}{n^2}$,

on aura alors : $\forall n \geq n_0, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < 10^{-3}$.

On a : $\frac{4}{n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow n^2 > \frac{4}{10^{-3}} \Leftrightarrow n^2 > 4000 \Leftrightarrow n > \sqrt{4000}$. Or, $\sqrt{4000} = 20\sqrt{10} \approx 63,25$.

On en déduit : $\forall n \geq 64, \frac{4}{n^2} < 10^{-3}$ et donc : $\forall n \geq 64, \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < 10^{-3}$.

Finalement :

$$\text{pour } n_0 = 64, \text{ on a : } \forall n \geq n_0, p_n - q_n < 10^{-3}$$

Question 3.c.

On a montré : $\forall n \geq 3, p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$. Pour $n \geq 3$, la probabilité p_n est donc strictement supérieure à la probabilité q_n . Il est donc préférable de tirer les billets simultanément si l'on a pour objectif d'obtenir exactement un billet gagnant.

Ceci dit, on a clairement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n - q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} \right) = 0$.

Plus précisément, grâce à la question précédente, on constate qu'avec seulement 64 billets (ce qui est peu pour un jeu de loterie) les deux probabilités diffèrent de moins de 0,001. En d'autres termes, les deux façons de tirer les billets peuvent être considérées, d'un point de vue pratique, comme équivalentes dès lors que le nombre total de billets est grand.

La conclusion précédente peut apparaître un peu surprenante. Pourtant, on conçoit aisément qu'en effectuant une remise du premier billet tiré, on augmente les chances d'avoir tiré *au moins* un billet gagnant à l'issue des deux tirages. Plus précisément, si l'on effectue une remise du premier billet, on augmente la probabilité de tirer *deux billets gagnants*. De fait, on conçoit mieux que le tirage avec remise est moins intéressant si l'on cherche à obtenir *exactement* un billet gagnant.

En définitive, si, dans le cas $n \geq 3$, on calcule la probabilité (ce calcul vous est laissé à titre d'exercice) d'obtenir *au moins* un billet gagnant, on trouve cette fois que le tirage avec remise est effectivement plus intéressant. Mais on conclura encore qu'avec un nombre élevé de billets la différence entre les deux modes de tirage décroît rapidement (décroissance en $1/n^2$).