Liban – Série ES – Juin 2004 – Exercice

Les résultats approchés seront donnés sous forme décimale, arrondis à 10^{-3}.

Pour répondre aux questions, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

Un centre d'entraînement réputé se voit confier de très nombreux chevaux., juments et mâles, spécialisés en trotteurs et en galopeurs selon leurs aptitude.

Ainsi, le centre comprend 62% de galopeurs, 30% de juments dont 35% font du galop.

On définit les événements suivants :

J : « Le cheval est une jument »,

T : « Le cheval est un trotteur ».

Un lad, chargé des soins, choisit au hasard un cheval du centre.

1. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit un trotteur ?

2. a. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit une jument qui fasse du galop ?
   b. Quelle est la probabilité que le cheval choisi soit un mâle qui fasse du galop ?

3. Le lad a choisi un mâle. Quelle est la probabilité que ce ne soit pas un trotteur ?
   Tôt le matin, il faut transporter quatre chevaux, du centre d'entraînement à l'hippodrome. Pour cela, un apprenti choisit les chevaux au hasard et de manière indépendante ; on admet que le nombre de chevaux dans ce centre est suffisamment grand pour assimiler le choix des quatre chevaux à des tirages successifs avec remise.

4. a. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux trotteurs parmi les quatre chevaux choisis.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un galopeur parmi les quatre chevaux choisis

Analyse

Probabilité conditionnelle, probabilités totales et schéma de Bernoulli sont les principaux ingrédients de ce sujet classique dans son contenu mais un peu moins dans sa forme …

Résolution

→ *Question 1.*

On cherche ici la probabilité de l'événement T, soit $p(\text{T})$.

D'après l'énoncé, le centre comprend un total de 62% de galopeurs.
Puisqu'il n'y a que des trotteurs et des galopeurs, on en déduit que centre compte un total de $100-62=38$ pour cent de trotteurs, soit 38%.

La probabilité que le cheval choisi soit un trotteur vaut donc : $p(\text{T})=0,38$.

→ *Question 2.a.*

« Le cheval choisi fait du galop » correspond à l'événement $\overline{\text{T}}$.
« Le cheval choisi est une jument » correspond à l'événement J.
On cherche donc ici la probabilité de l'événement $\text{J}\cap\overline{\text{T}}$

L'énoncé nous précise que « 35% des juments font du galop ».
On a donc : $p_{\text{J}}\left(\overline{\text{T}}\right)=0,35$.

Or, $p_{\text{J}}\left(\overline{\text{T}}\right)=\dfrac{p\left(\text{J}\cap\overline{\text{T}}\right)}{p(\text{J})}$.

Enfin, l'énoncé précise que le centre compte 30% de juments. On a donc : $p(\text{J})=0,3$.

Finalement : $p\left(\text{J}\cap\overline{\text{T}}\right)=p_{\text{J}}\left(\overline{\text{T}}\right)\times p(\text{J})=0,35\times 0,3=0,105$

La probabilité que le cheval choisi soit une jument faisant du galop est égale à 0,105.

→ *Question 2.b.*

On cherche dans cette question la probabilité de l'événement $\overline{\text{J}}\cap\overline{\text{T}}$.

D'après l'énoncé, la proportion de galopeurs dans le centre est égale à 62%, soit 0,62.
On a donc : $p\left(\overline{\text{T}}\right)=0,62$.

A la question précédente, on a évalué $p\left(\text{J}\cap\overline{\text{T}}\right)$.

Les événements J et $\overline{\mathrm{J}}$ forment une partition de l'univers (tout cheval est un mâle ou une jument et ne peut être les deux à la fois !). La formule des probabilités totales nous permet donc d'écrire :

$$p\left(\overline{\mathrm{T}}\right)=p\left(\overline{\mathrm{T}}\cap\mathrm{J}\right)+p\left(\overline{\mathrm{T}}\cap\overline{\mathrm{J}}\right)$$

Il vient donc :

$$p\left(\overline{\mathrm{T}}\cap\overline{\mathrm{J}}\right)=p\left(\overline{\mathrm{T}}\right)-p\left(\overline{\mathrm{T}}\cap\mathrm{J}\right)=0,62-0,105=0,515$$

La probabilité que le cheval choisi soit un mâle faisant du galop est égale à 0,515.

→ *Question 3.*

Le cheval choisi par le lad est un mâle. On s'intéresse à la probabilité que ce ne soit pas un trotteur.
On cherche donc à calculer $p_{\overline{\mathrm{J}}}\left(\overline{\mathrm{T}}\right)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a : $p_{\overline{\mathrm{J}}}\left(\overline{\mathrm{T}}\right)=\dfrac{p\left(\overline{\mathrm{J}}\cap\overline{\mathrm{T}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{J}}\right)}$.

Le numérateur de cette fraction a été calculé à la question précédente.
Par ailleurs, puisqu'il y a 30% de juments dans le centre, on a $p\left(\mathrm{J}\right)=0,3$ et on en tire immédiatement :

$$p\left(\overline{\mathrm{J}}\right)=1-p\left(\mathrm{J}\right)=1-0,3=0,7$$

On a finalement : $p_{\overline{\mathrm{J}}}\left(\overline{\mathrm{T}}\right)=\dfrac{p\left(\overline{\mathrm{J}}\cap\overline{\mathrm{T}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{J}}\right)}=\dfrac{0,515}{0,7}\simeq 0,736$

La probabilité que le cheval choisi ne soit pas un trotteur sachant qu'il s'agit d'un mâle est environ égale à 0,736 à 10^{-3} près.

→ *Question 4.a.*

Le choix des quatre chevaux est assimilable à un tirage avec remise.
Les choix des quatre chevaux sont indépendants les uns des autres.
Chacun des quatre choix peut, par ailleurs, être modélisé par une expérience de Bernoulli de paramètre 0,38 puisque la probabilité qu'un cheval pris au hasard soit un trotteur est de 0,38.

Dans ces conditions, le choix de quatre chevaux pris au hasard correspond à un schéma de Bernoulli suivant une loi binomiale de paramètres 4 et 0,38.

Considérons alors l’événement A : « Il y a exactement deux trotteurs parmi les quatre chevaux choisi ».

On cherche la probabilité $p(\mathrm{A})$ de cet événement.

Pour obtenir le nombre d’issues réalisant A, on donne les listes des tirages favorables :

$$\mathrm{TT\overline{T}\overline{T}},\ \mathrm{T\overline{T}T\overline{T}},\ \mathrm{T\overline{T}\overline{T}T},\ \mathrm{\overline{T}TT\overline{T}},\ \mathrm{\overline{T}T\overline{T}T}\text{ et }\mathrm{\overline{T}\overline{T}TT}$$

L’événement A est donc réalisé par 6 issues.

La probabilité p de chacune de ces issues vaut, les tirages des quatre chevaux étant indépendants : $p = 0,38^2 \times 0,62^2$.

Finalement : $p(\mathrm{A}) = 6 \times 0,38^2 \times 0,62^2 = 0,33304416$, soit 0,333 à 10^{-3} près.

La probabilité qu’il y ait exactement deux trotteurs parmi les quatre chevaux choisi est environ égale à 0,333 à 10^{-3} près.

→ *Question 4.b.*

Considérons cette fois l’événement B : « Il y a au moins un galopeur parmi les quatre chevaux choisi ».

On cherche la probabilité $p(\mathrm{B})$ de cet événement.

On a intérêt ici à raisonner sur l’événement complémentaire de B :
$\overline{\mathrm{B}}$: « Il n’y a pas de galopeur parmi les quatre chevaux choisis ».
Soit encore : « Il n’y a que des trotteurs parmi les quatre chevaux choisis ».

La seule issue réalisant $\overline{\mathrm{B}}$ correspond à la liste TTTT dont la probabilité vaut :
$p(\mathrm{TTTT}) = 0,38^4$.

On a alors : $p(\mathrm{B}) = 1 - p(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - 0,38^4 = 1 - 0,02085136 = 0,97914864$ soit 0,979 à 10^{-3} près.

La probabilité qu’il y ait au moins un galopeur parmi les quatre chevaux choisi est environ égale à 0,979 à 10^{-3} près.