## Aix - Marseille – Série ES – Juin 2001 – Exercice

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.
Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.
On sait de plus que :
20% des étudiants de la filière A sont des filles ;
30% des étudiants de la filière B sont des filles ;
40% des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant dans cette université.

On note A l'événement : l'étudiant est inscrit dans la filière A. De même pour B et C.
On note F l'événement : l'étudiant est une fille ; G l'événement : l'étudiant est un garçon.

1. Calculer les probabilités des événements A, B, C ; on vérifiera que $p(B)=0,3$.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille. Montrer que $p(F)=0,25$.
3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

## Analyse

Le début consiste en des calculs de probabilité qui requièrent de travailler sur des effectifs définis les uns par rapport aux autres et non sous forme numérique.
La suite de l'exercice consiste à déterminer quelques probabilités conditionnelles qui, au-delà de la définition, font appel à la notion de partition et aux probabilités totales.

## Résolution

### → *Question 1.*

Notons $N_{\mathrm{A}}$, $N_{\mathrm{B}}$ et $N_{\mathrm{C}}$ les effectifs des filières A, B et C respectivement.
Notons $N$ l'effectif global de l'université.

Puisque l'université propose exactement trois filières et que chaque étudiants est inscrit dans l'une d'elles exactement, on peut écrire : $N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}+N_{\mathrm{C}}=N$.

Par ailleurs, on a d'après l'énoncé :

- $N_{\mathrm{A}}=2N_{\mathrm{B}}$ ;
- $N_{\mathrm{B}}=3N_{\mathrm{C}}$.

On en déduit : $N_{\mathrm{A}}=2N_{\mathrm{B}}=2\times 3N_{\mathrm{C}}=6N_{\mathrm{C}}$.

L'égalité : $N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}+N_{\mathrm{C}}=N$ équivaut alors à : $6N_{\mathrm{C}}+3N_{\mathrm{C}}+N_{\mathrm{C}}=N$, soit : $10N_{\mathrm{C}}=N$.

Finalement : $N_{\mathrm{C}}=\dfrac{N}{10}$.

On en déduit alors : $N_{\mathrm{B}}=3N_{\mathrm{C}}=\dfrac{3N}{10}$ et $N_{\mathrm{A}}=6N_{\mathrm{C}}=\dfrac{6N}{10}=\dfrac{3N}{5}$.

On peut alors écrire :

$$\mathrm{p}(\mathrm{A})=\frac{N_{\mathrm{A}}}{N}=\frac{3}{5}=\boxed{0,6},\ \mathrm{p}(\mathrm{B})=\frac{N_{\mathrm{B}}}{N}=\frac{3}{10}=\boxed{0,3}\ \text{ et }\ \mathrm{p}(\mathrm{C})=\frac{N_{\mathrm{C}}}{N}=\frac{1}{10}=\boxed{0,1}$$

$$\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{A})=\mathbf{0,6}\qquad \mathbf{p}(\mathbf{B})=\mathbf{0,3}\qquad \mathbf{p}(\mathbf{C})=\mathbf{0,1}}$$

### → *Question 2.*

On cherche ici $\mathrm{p}(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})$.

Calculons l'effectifs $N_{\mathrm{AF}}$ des filles parmi les étudiants de la filière A.

Il y a $N_{\mathrm{A}}=\dfrac{3N}{5}$ étudiants dans la filière A.

20% d'entre eux sont des filles, soit : $N_{\mathrm{AF}}=\dfrac{20}{100}N_{\mathrm{A}}=\dfrac{20}{100}\times\dfrac{3N}{5}=\dfrac{3N}{25}$.

On en déduit alors : $\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) = \frac{N_{\mathrm{AF}}}{N} = \frac{3}{25} = 0{,}12$.

**La probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille vaut donc : $\mathbf{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{F}) = \mathbf{0{,}12}$**

En procédant de la même façon avec les deux autres filières, on a :

- $N_{\mathrm{BF}} = \frac{30}{100} N_{\mathrm{B}} = \frac{30}{100} \times \frac{3N}{10} = \frac{9N}{100}$ et $\mathrm{p}(\mathrm{B} \cap \mathrm{F}) = \frac{N_{\mathrm{BF}}}{N} = \frac{9}{100} = 0{,}09$ ;
- $N_{\mathrm{CF}} = \frac{40}{100} N_{\mathrm{C}} = \frac{40}{100} \times \frac{N}{10} = \frac{4N}{100} = \frac{2N}{50}$ et $\mathrm{p}(\mathrm{C} \cap \mathrm{F}) = \frac{N_{\mathrm{CF}}}{N} = \frac{2}{50} = 0{,}04$.

Les événements A, B et C formant une partition de l'univers, on peut écrire la formule des probabilités totales sous la forme :

$$\mathrm{p}(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) + \mathrm{p}(\mathrm{B} \cap \mathrm{F}) + \mathrm{p}(\mathrm{C} \cap \mathrm{F})$$

On obtient alors : $\mathrm{p}(\mathrm{F}) = \mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) + \mathrm{p}(\mathrm{B} \cap \mathrm{F}) + \mathrm{p}(\mathrm{C} \cap \mathrm{F}) = 0{,}12 + 0{,}09 + 0{,}04 = 0{,}25$

$$\mathbf{p}(\mathbf{F}) = \mathbf{0{,}25}$$

### → *Question 3.*

On cherche ici : $\mathrm{p}(\mathrm{A} \mid \mathrm{F})$.

Par définition : $\mathrm{p}(\mathrm{A} \mid \mathrm{F}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F})}{\mathrm{p}(\mathrm{F})}$.

Avec les valeurs numériques obtenues précédemment, il vient :

$$\mathrm{p}(\mathrm{A} \mid \mathrm{F}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{F})}{\mathrm{p}(\mathrm{F})} = \frac{0{,}12}{0{,}25} = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

**La probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille vaut : $\mathbf{p}(\mathbf{A} \mid \mathbf{F}) = \mathbf{0{,}48}$**

### → *Question 4.*

« Ne pas être inscrit dans la filière A » correspond à l'événement $\overline{\mathrm{A}}$.

On cherche donc ici : $\mathrm{p}(\mathrm{F} \mid \overline{\mathrm{A}})$.

Par définition : $p\left(F\,|\,\overline{A}\right)=\dfrac{p\left(F\cap\overline{A}\right)}{p\left(\overline{A}\right)}$

On a : $p\left(\overline{A}\right)=1-p\left(A\right)=1-0,6=0,4$.

Par ailleurs, comme les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, on a :

$$p\left(F\right)=p\left(F\cap A\right)+p\left(F\cap\overline{A}\right).$$

Il vient alors, en tenant compte des résultats obtenus plus haut :

$$p\left(F\cap\overline{A}\right)=p\left(F\right)-p\left(F\cap A\right)=0,25-0,12=0,13.$$

On a donc : $p\left(F\,|\,\overline{A}\right)=\dfrac{p\left(F\cap\overline{A}\right)}{p\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{0,13}{0,4}=\dfrac{13}{40}=0,325$

**La probabilité que l'étudiant soit une fille sachant qu'il n'est pas inscrit dans la filière A vaut : $\mathbf{p\left(F\,|\,\overline{A}\right)=0,325}$**