

Amérique du Sud – Série ES – Novembre 2002 – Exercice

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et de deux urnes, l'une marquée de la lettre « F » et l'autre marquée de la lettre « P ».

1. Chacune des deux urnes contient 6 boules. L'urne marquée « F » contient 5 boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée « P » contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

On lance la pièce de monnaie :

- Si on obtient « face », on tire une boule dans l'urne marquée « F » ;
- Si on obtient « pile », on tire une boule dans l'urne marquée « P ».

On note P, F, B et N les événements suivants :

P : « on a obtenu pile au lancer de la pièce » ;

F : « on a obtenu face au lancer de la pièce » ;

B : « on a tiré une boule blanche » ;

N : « on a tiré une boule noire ».

- a. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a obtenu « face » au lancer de la pièce.
 - b. En déduire la probabilité d'obtenir « face » au lancer de la pièce et de tirer une boule blanche.
 - c. Calculer la probabilité de l'événement $B \cap P$.
 - d. Déduire des questions précédentes que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{7}{12}$.
2. On effectue la même expérience aléatoire, les deux urnes contenant à présent $2n$ boules, n étant un entier naturel non nul. L'urne marquée « F » contient $(2n-1)$ boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée « P » contient $(n-1)$ boules blanches et $(n+1)$ boules noires.

Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{3n-2}{4n}$.

3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{3n-2}{4n}$ pour tout entier naturel n non nul.
 - a. Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de la suite (u_n) .

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{4n(n+1)}$.

c. Dédire de la question précédente le sens de variation de la suite (u_n) .

Analyse

Probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales et suites numériques sont les principaux ingrédients d'un exercice classique dont les trois questions ont leurs particularités propres : dans la première, on traite d'un exemple numérique ; dans la seconde, on généralise la situation de la première question ; dans la troisième, enfin, on fait tendre le nombre de boules vers l'infini et on peut, par un raisonnement rapide, retrouver la valeur de la probabilité cherchée sans utiliser la question 2.

Résolution

→ *Question 1.a.*

On cherche ici la probabilité de l'événement « B sachant F ». Nous pouvons la noter : $p_F(\mathbf{B})$.

On a obtenu « face » au lancer de la pièce. On va donc tirer une boule dans l'urne marquée « F ». Cette urne contient 5 boules blanches et 1 boule noire.

Le nombre total de boules étant 6, la probabilité de tirer une boule blanche dans cette urne

est : $\frac{5}{6}$.

Finalement :

$$p_F(\mathbf{B}) = \frac{5}{6}$$

→ *Question 1.b.*

« Obtenir « face » au lancer de la pièce et tirer une boule blanche » correspond à l'événement $F \cap \mathbf{B}$.

On a : $p_F(\mathbf{B}) = \frac{p(F \cap \mathbf{B})}{p(F)}$.

D'où : $p(F \cap \mathbf{B}) = p_F(\mathbf{B}) \times p(F)$.

La pièce de monnaie étant parfaitement équilibrée, on a : $p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$.

D'où, en tenant compte du résultat obtenu à la première question :

$$p(F \cap \mathbf{B}) = p_F(\mathbf{B}) \times p(F) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$$p(F \cap \mathbf{B}) = \frac{5}{12}$$

→ *Question 1.c.*

On cherche ici $p(\mathbf{B} \cap \mathbf{P})$.

On procède de façon analogue à ce qui a été fait dans les deux premières questions.

Dans un premier temps, on détermine la probabilité de l'événement « B sachant P », notée $p_{\mathbf{P}}(\mathbf{B})$.

L'urne marquée « P » contenant 2 boules blanches et 4 boules noires, la probabilité $p_{\mathbf{P}}(\mathbf{B})$

$$\text{vaut : } p_{\mathbf{P}}(\mathbf{B}) = \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dans un second temps, nous écrivons : $p(\mathbf{P} \cap \mathbf{B}) = p_{\mathbf{P}}(\mathbf{B}) \times p(\mathbf{P})$.

$$\text{Comme } p(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}, \text{ il vient : } p(\mathbf{P} \cap \mathbf{B}) = p_{\mathbf{P}}(\mathbf{B}) \times p(\mathbf{P}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$p(\mathbf{P} \cap \mathbf{B}) = \frac{1}{6}$$

→ *Question 1.d.*

On cherche la probabilité de l'événement B.

Les événements P et F formant une partition de l'univers associé à l'expérience aléatoire, nous pouvons écrire (formule des probabilités totales) : $p(\mathbf{B}) = p(\mathbf{B} \cap \mathbf{F}) + p(\mathbf{B} \cap \mathbf{P})$.

On a alors, en tenant compte de deux questions précédentes :

$$p(\mathbf{B}) = p(\mathbf{B} \cap \mathbf{F}) + p(\mathbf{B} \cap \mathbf{P}) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

$$p(\mathbf{B}) = \frac{7}{12}$$

→ *Question 2.*

Cette question vise à généraliser les résultats obtenus à la question 1.

Les probabilités des événements P et F sont inchangées et toutes deux égales à $\frac{1}{2}$.

En revanche, les probabilités conditionnelles $p_{\mathbf{F}}(\mathbf{B})$ et $p_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})$ vont être exprimées en fonction de n .

L'urne marquée « F » contient $2n$ boules dont $(2n-1)$ sont blanches.

On a donc : $p_F(B) = \frac{2n-1}{2n}$ et $p(F \cap B) = p_F(B) \times p(F) = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{1}{2} = \frac{2n-1}{4n}$.

L'urne marquée « P » contient $2n$ boules dont $(n-1)$ sont blanches.

On a donc : $p_P(B) = \frac{n-1}{2n}$ et $p(P \cap B) = p_P(B) \times p(P) = \frac{n-1}{2n} \times \frac{1}{2} = \frac{n-1}{4n}$.

La formule des probabilités totales s'écrit cette fois :

$$p(B) = p(B \cap F) + p(B \cap P) = \frac{2n-1}{4n} + \frac{n-1}{4n} = \frac{3n-2}{4n}$$

Finalement, on a bien :

$$p(B) = \frac{3n-2}{4n}$$

Remarque : la situation décrite dans cette question généralise la situation de la question 1. On retrouve celle-ci en prenant pour n la valeur 3.

Pour $n=3$, la formule précédente donne : $p(B) = \frac{3n-2}{4n} = \frac{3 \times 3 - 2}{4 \times 3} = \frac{7}{12}$.

On retrouve la valeur obtenue à la question 1.d. Sans que ce soit un élément de vérification absolu, on est cependant conforté dans notre démarche ...

→ Question 3.a.

u_n est l'image par une fonction rationnelle de la variable entière non nulle n . Pour en déterminer la limite en $+\infty$, on ne conserve au numérateur et au dénominateur que les termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{4n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3n}{4n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4}$$

Remarque : l'urne marquée « F » contient $2n$ boules dont $(2n-1)$ boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche tend donc vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ (il n'y a pratiquement que des boules blanches dans l'urne !).

Dans l'urne marquée « P » il y a $2n$ boules dont $(n-1)$ boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche tend donc vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (il y a pratiquement la moitié des boules qui sont blanches et l'autre moitié des boules qui sont noires !).

Comme on a la même probabilité d'effectuer le tirage de la boule dans l'une ou l'autre des deux urnes, on en déduit que la probabilité de tirer une boule blanche est la moyenne arithmétique de 1 et $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, c'est à dire $\frac{3}{4}$.

→ *Question 3.b.*

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{4(n+1)} - \frac{3n-2}{4n} = \frac{3n+1}{4(n+1)} - \frac{3n-2}{4n} \\ &= \frac{(3n+1)n - (3n-2)(n+1)}{4n(n+1)} = \frac{3n^2 + n - 3n^2 - n + 2}{4n(n+1)} \\ &= \frac{2}{4n(n+1)} \end{aligned}$$

On a bien :

<p>Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{4n(n+1)}$</p>
--

→ *Question 3.c.*

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $4n(n+1) > 0$ et, par conséquent :

$$\frac{2}{4n(n+1)} > 0.$$

Donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} - u_n > 0$.

Finalement :

<p>La suite (u_n) est strictement croissante.</p>
