Amérique du Sud – Série ES – Novembre 2001 - Exercice

Dans chacun des calculs, donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

Le jeune Bob obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver sa maman lui propose le jeu suivant : à chaque fois qu'il obtient une « bonne » note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 7 pièces de 1 euro et 3 pièces de 2 euros.
Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois.
Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.
Déterminer la probabilité des événements suivants :
A : « Bob tire deux pièces de 1 euro »,
B : « Bob tire deux pièces de 2 euros »,
C : « Bob tire deux pièces de valeurs différentes ».

Partie B – On conserve le principe du jeu du A

On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Bob en changeant juste le nombre de pièces de 2 euros dans le sac, le nombre de pièces de 1 euro étant toujours de 7.
On suppose qu'il y a *n* pièces dans le sac dont toujours 7 pièces de 1 euro (*n* est un entier naturel supérieur ou égal à 10).

1. Montrer que la probabilité p_n de l'événement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes » est :
$$p_n = \frac{14(n-7)}{n(n-1)}$$
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[10;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{14(x-7)}{x(x-1)}$$
Etudier les variations de *f* et en déduire les deux valeurs entières consécutives de *n* entre lesquelles la fonction *f* présente son maximum. Donner alors la valeur maximale de p_n.

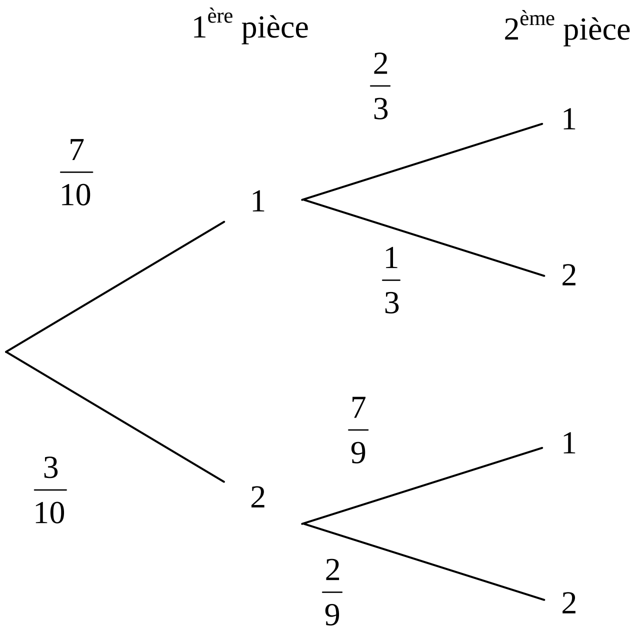
Analyse

Cet exercice correspond à un expérience aléatoire de type « tirages successifs sans remise ». La première partie est classique et considère une situation simple où les nombres de boules sont définis numériquement. La deuxième partie généralise la situation précédente et propose la recherche d'une configuration optimale (au sens du gain de l'enfant) à l'aide de l'étude d'une fonction auxiliaire.

Résolution

Partie A

On peut s'aider de l'arbre pondéré suivant :



L'univers comporte un total de 4 issues pouvant être écrites sous forme de listes : 11, 12, 21 et 22 :

$$\Omega = \{11, 12, 21, 22\}$$

Les probabilité sont calculées en tenant compte du fait qu'il n'y a pas remise.

On a alors :

$$\mathrm{A} = \{11\} \text{ donc : } p(\mathrm{A}) = p(11) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\mathrm{B} = \{22\} \text{ donc : } p(\mathrm{B}) = p(22) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

Comme $C=\{12,21\}$, nous pouvons procéder de deux façons pour calculer $p(C)$:

- $p(C)=p(\{12,21\})=p(12)+p(21)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}+\frac{7}{30}=\frac{7}{15}$
- L'événement C est le complémentaire de $A\cup B$. Or A et B sont deux issues de l'univers donc $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$.

  Donc : $p(C)=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$.

Finalement :

La probabilité de l'événement A vaut : $p(A)=\frac{7}{15}$

La probabilité de l'événement B vaut : $p(B)=\frac{1}{15}$

La probabilité de l'événement C vaut : $p(C)=\frac{7}{15}$

Partie B

Question 1.

On s'intéresse ici à l'événement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes ».

Le nombre total de pièces de l'urne étant n (dont 7 pièces de 1 euro), il vient :

$$p(12)=\frac{7}{n}\times\frac{n-7}{n-1}=\frac{7(n-7)}{n(n-1)} \text{ et } p(21)=\frac{n-7}{n}\times\frac{7}{n-1}=\frac{7(n-7)}{n(n-1)}$$

D'où :

$$p_n=p(12)+p(21)=\frac{7(n-7)}{n(n-1)}+\frac{7(n-7)}{n(n-1)}=\frac{14(n-7)}{n(n-1)}$$

On a bien :

$$\boxed{p_n=\frac{14(n-7)}{n(n-1)}}$$

Question 2.

On considère sur $[10;+\infty[$ la fonction *f* définie par : $f(x)=\dfrac{14(x-7)}{x(x-1)}$.

Cette fonction est dérivable en tant que fonction rationnelle et on a :

$$\begin{aligned}f'(x)&=14\frac{x(x-1)-(x-7)(2x-1)}{\left(x(x-1)\right)^2}\\&=14\frac{x^2-x-2x^2+15x-7}{\left(x(x-1)\right)^2}\\&=14\frac{-x^2+14x-7}{\left(x(x-1)\right)^2}\end{aligned}$$

Le signe de f' est celui de son numérateur, c'est à dire de la fonction polynôme $x\mapsto -x^2+14x-7$.

Résolvons $-x^2+14x-7=0$.

On a : $\Delta=14^2-4\times(-1)\times(-7)=196-28=168=4\times 42=\left(2\sqrt{42}\right)^2$.

L'équation admet donc les deux racines :

$$x_1=\frac{-14-2\sqrt{42}}{-2}=7+\sqrt{42}\simeq 13,48 \text{ et } x_2=\frac{-14+2\sqrt{42}}{-2}=7-\sqrt{42}\simeq 0,52$$

On ne retient que la première racine puisque nous travaillons sur l'intervalle $[10;+\infty[$.
D'après ce qui précède :

- Sur $\left[10;7+\sqrt{42}\right[$, $f'(x)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante ;
- Sur $\left]7+\sqrt{42};+\infty\right[$, $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante.

On en déduit que la courbe représentative de *f* admet un maximum en $x=7+\sqrt{42}$.

D'après la valeur approchée, on a : $13<7+\sqrt{42}<14$.

On a : $f(13)=\dfrac{14\times 6}{13\times 12}=\dfrac{7}{13}$ et $f(14)=\dfrac{14\times 7}{14\times 13}=\dfrac{7}{13}$.

On en déduit : $f(13)=f(14)=p_{13}=p_{14}=\dfrac{7}{13}$.

Finalement :

La valeur maximale de la probabilité p_n est obtenue pour $n = 13$ ou $n = 14$.

Elle vaut : $\dfrac{7}{13}$.

Remarque : avec $n = 10$, on retrouve la valeur de $p(\mathrm{C})$ calculée dans la première partie :

$p_{10} = p(\mathrm{C}) = \dfrac{7}{15}$.