

Liban – Juin 2000 - Exercice

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

Dans les questions 1. et 2. on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants :

A : « les trois boules sont rouges »

B : « les trois boules sont de la même couleur »

C : « les trois boules sont chacune d'une couleur différente »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est à dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants :

D : « tirer deux boules rouges »

E : « tirer deux boules de la même couleur »

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est :

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

b. Calculer la probabilité de l'événement E, $p(E)$, en fonction de n .

Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \frac{1}{2}$?

Analyse

Dans un premier temps, l'exercice propose une situation où des calculs de probabilités vont permettre de définir une loi de probabilité. Cette première question repose essentiellement sur des calculs du type « dénombrement ». La deuxième question généralise dans une certaine mesure la situation de la première.

Résolution

→ *Question 1.a.*

Commençons par déterminer le nombre total N de tirages possibles. Puisqu'il s'agit de tirer 3 boules parmi 10 et que celles-ci sont indiscernables, on a :

$$N = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = \frac{10 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{2} \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 120$$

Comptons maintenant le nombre d'issues réalisant l'événement A.

Il s'agit du nombre de tirage N_R de 3 boules rouges. L'urne contenant un total de 5 boules rouges, on cherche en fait le nombre de possibilités de tirer 3 boules rouges parmi 5. On a donc :

$$N_R = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Il vient alors :

$$p(A) = \frac{N_R}{N} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

Puisque l'urne contient 2 boules vertes et également 3 boules jaunes, l'événement B est la réunion des deux événements disjoints :

- « Les trois boules sont rouges » ;
- « Les trois boules sont jaunes ».

Le premier événement est l'événement A dont nous venons de calculer la probabilité.

Une seule issue réalise le second événement : elle correspond à l'unique tirage des trois boules jaunes. La probabilité du second événement est simplement : $\frac{1}{120}$.

Les deux événements ci-dessus étant disjoints, il vient :

$$p(B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{11}{120}$$

Intéressons-nous maintenant à l'événement C.

On a :

- Le nombre de possibilités de tirer 1 boule rouge parmi 5 : $\binom{5}{1} = 5$;
- Le nombre de possibilités de tirer 1 boule jaune parmi 3 : $\binom{3}{1} = 3$;
- Le nombre de possibilités de tirer 1 boule verte parmi 2 : $\binom{2}{1} = 2$.

Le nombre de tirages de trois boules de couleurs différentes est donc : $5 \times 3 \times 2 = 30$.
On en déduit :

$$p(C) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

Les probabilités des événements A, B et C sont respectivement :

$$p(A) = \frac{1}{12}, \quad p(B) = \frac{11}{120} \quad \text{et} \quad p(C) = \frac{1}{4}.$$

→ *Question 1.b.*

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1, 2 et 3.

D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$p(X=1) = p(B) = \frac{11}{120} \quad \text{et} \quad p(X=3) = p(C) = \frac{1}{4}$$

Comme on a : $p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = 1$, il vient :

$$p(X=2) = 1 - p(X=1) - p(X=3) = 1 - \frac{11}{120} - \frac{1}{4} = \frac{120 - 11 - 30}{120} = \frac{79}{120}$$

Finalement, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

<i>k</i>	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

→ *Question 2.a.*

On procède de façon analogue à ce qui a été fait à la question 1.a.

Commençons par déterminer le nombre total N de tirages possibles. Puisqu'il s'agit de tirer 2 boules parmi $n+5$ et que celles-ci sont indiscernables, on a :

$$N = \binom{n+5}{2} = \frac{(n+5)!}{2!(n+3)!} = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$$

Comptons maintenant le nombre d'issues réalisant l'événement D.

Il s'agit du nombre de tirage N_R de 2 boules rouges. L'urne contenant un total de n boules rouges, on cherche en fait le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges parmi n . On a donc :

$$N_R = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Il vient alors :

$$p(D) = \frac{N_R}{N} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

On a bien :

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

→ *Question 2.b.*

Commençons par déterminer $p(E)$.

Les deux boules peuvent être toutes les deux rouges, toutes les deux vertes ou toutes les deux jaunes.

A la question précédente, nous avons déterminé la probabilité que les deux boules soient rouges. En procédant de façon similaire :

- Le nombre de façons de tirer deux boules jaunes parmi 3 vaut : $\binom{3}{2} = 3$. La probabilité de tirer deux boules jaunes vaut donc : $\frac{3}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{6}{(n+5)(n+4)}$;

- Le nombre de façons de tirer deux boules vertes parmi 2 vaut : 1. La probabilité de tirer deux boules vertes vaut donc : $\frac{1}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{2}{(n+5)(n+4)}$.

Il vient finalement :

$$p(\text{E}) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} + \frac{6}{(n+5)(n+4)} + \frac{2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2 - n + 8}{(n+5)(n+4)}$$

$$p(\text{E}) = \frac{n^2 - n + 8}{(n+5)(n+4)}$$

On cherche n tel que $p(\text{E}) \geq \frac{1}{2}$.

A l'aide du résultat précédent et en tenant compte du fait que le produit $(n+5)(n+4)$ est strictement positif, il vient :

$$\begin{aligned} p(\text{E}) &\geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2 - n + 8}{(n+5)(n+4)} &\geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2(n^2 - n + 8) &\geq (n+5)(n+4) \\ \Leftrightarrow 2n^2 - 2n + 16 &\geq n^2 + 9n + 20 \\ \Leftrightarrow n^2 - 11n - 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

On peut bien sûr commencer par résoudre l'inéquation du second degré dans \mathbb{R} : $x^2 - 11x - 4 \geq 0$.

On peut aussi remarquer que cette inéquation se récrit : $n(n-1) - 4 \geq 0$.

Travaillons directement dans $[2; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x(x-11)$ s'annule en 11 et est strictement croissante sur $[11; +\infty[$.

Pour $x = 12$, elle prend la valeur $12 \times (12 - 11) = 12 > 4$.

On en déduit : $\forall x \in [12; +\infty[$, $x(x-11) > 4$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 12, on a : $n^2 - 11n - 4 > 0$.

Finalement :

La probabilité $p(\text{E})$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 12.