Pondichéry – Avril 2008 - Exercice

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

- 50 % des clients choisissent la destination A.
- 30 % des clients choisissent la destination G.
- 20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.
Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les évènements :

- A : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A " ;
- G : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G " ;
- M : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M " ;
- S : " le questionnaire est celui d'un client satisfait " ;
- $\overline{\mathrm{S}}$: " le questionnaire est celui d'un client insatisfait ".

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2. a) Traduire par une phrase les événements $\mathrm{G} \cap \mathrm{S}$ et $\mathrm{M} \cap \mathrm{S}$ puis calculer les probabilités $p(\mathrm{G} \cap \mathrm{S})$ et $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{S})$;

   b) L’enquête montre que 72% des clients de l’agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{S})$;

   c) En déduire $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{S})$, probabilité de l’événement S sachant que l’événement A est réalisé ;

3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).

4. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.

   Calculer la probabilité de l'évènement : " les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits " (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

Analyse

Un exercice de probabilité classique qui passe en revue les principaux thèmes du programme : probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, loi binomiale … S'il ne présente pas de difficulté particulière, il mérite un certain soin dans la rédaction pour ne pas ressembler à une simple accumulation de formules de cours.

Résolution

→ *Question 1.*

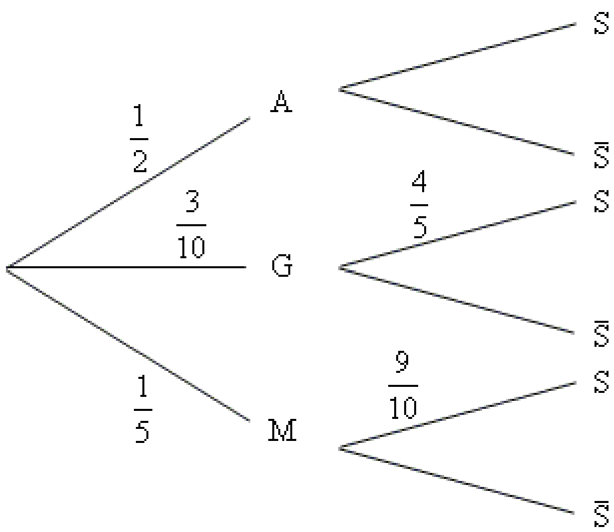
Les trois premiers pourcentages fournis nous permettent d'écrire :

$$p(\mathrm{A}) = 50\% = 0,5 = \frac{1}{2},\ \ p(\mathrm{G}) = 30\% = 0,3 = \frac{3}{10}\ \text{ et }\ p(\mathrm{M}) = 20\% = 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

On précise ensuite que :

- 90% des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits.
  D'où : .
- 80% des clients ayant choisi la destination G sont satisfaits.
  D'où : $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) = 80\% = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

On en tire alors l'arbre suivant :



→ *Question 2.a.*

L'événement $\mathrm{G} \cap \mathrm{S}$ peut être traduit par la phrase « Le questionnaire est celui d'un client qui a choisi la destination G et en est revenu satisfait ».

De façon similaire, l'événement $M \cap S$ peut être traduit par la phrase « Le questionnaire est celui d'un client qui a choisi la destination M et en est revenu satisfait ».

Pour ce qui est des probabilités correspondantes, on a :

$$p(G \cap S) = p_G(S) \times p(G) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 2}{5 \times \cancel{2} \times 5} = \frac{4}{25} = 0,24$$

$$p(M \cap S) = p_M(S) \times p(M) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{50} = 0,18$$

$$\boldsymbol{p(M \cap S) = 0,24 \text{ et } p(M \cap S) = 0,18}$$

→ *Question 2.b.*

On nous donne $p(S) = 72\% = 0,72$.
Les clients ont choisi une et une seule destination et seules les destinations A, G et M sont proposées. On peut donc affirmer que les événements A, G et M forment une partition de l'univers.

Le formule des probabilités totales nous permets alors d'écrire :

$$p(S) = p(A \cap S) + p(G \cap S) + p(M \cap S)$$

Soit :

$$p(A \cap S) = p(S) - p(G \cap S) - p(M \cap S)$$

Soit, numériquement :

$$p(A \cap S) = 0,72 - 0,24 - 0,18 = 0,3$$

$$\boldsymbol{p(A \cap S) = 0,3}$$

→ *Question 2.c.*

On tire de ce qui précède :

$$p_A(S) = \frac{p(A \cap S)}{p(A)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\boldsymbol{p_A(S) = \frac{3}{5} = 0,6}$$

→ *Question 3.*

On sait ici que le client est satisfait et, la destination ayant été omise dans le questionnaire, on cherche : $p_S(G)$.

On a, par définition de la probabilité conditionnelle : $p_S(G) = \dfrac{p(G \cap S)}{p(S)}$.

Soit, numériquement : $p_S(G) = \dfrac{p(G \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,24}{0,72} = \dfrac{24}{72} = \dfrac{1}{3}$.

$$\boldsymbol{p_S(G) = \frac{1}{3}}$$

→ *Question 4.*

Raisonnons, pour commencer, au niveau d'un seul dossier. La probabilité qu'il s'agisse du dossier d'un client insatisfait est $p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - 0,72 = 0,28$. Si on considère qu'obtenir un tel dossier correspond à un « succès ». La probabilité de cet événement vaut 0,28. Si, classiquement nous associons la valeur 1 à cet événement et la valeur 0 à l'événement contraire (« échec »), nous avons affaire à une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,28$.

Dans ces conditions, si on note X le nombre de dossiers de clients insatisfaits comptabilisés à l'issue des trois tirages indépendants, X est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3 et suit une loi binomiale de paramètre 3 et 0,28 :

$$X \sim \mathscr{B}(3; 0,28)$$

La probabilité cherchée dans cette question correspond à la seule issue $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$ et vaut alors $p(X = 3)$. On a simplement :

$$p(X = 3) = 0,28^3 \simeq 0,022 \text{ (valeur arrondie au millième)}$$

La probabilité de tirer trois dossiers de clients insatisfaits vaut 0,022 au millième près.