Polynésie française – Septembre 2006 – Série S - Exercice

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a) Quelle sont les valeurs prises par X ?
   b) Calculer $P\left(X=0\right)$.
   c) On se propose de déterminer maintenant $P\left(X=1\right)$.
   - Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.
   - En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P\left(X=1\right)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
   Soit k un entier compris entre 1 et n.
   Soit N l'événement « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
   Soit A l'événement « On obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».
   Soit B l'événement « On obtient une boule blanche dans chacun des $\left(n-k\right)$ derniers tirages ».

Calculer :

- $P(A)$,
- $P_A(B)$
- et $P(N)$.

Analyse

L'exercice aborde essentiellement le thème des probabilités conditionnelles via une situation de tirages successifs dans une urne. Cette situation est « mixte » en ce sens qu'on a remise ou non suivant la couleur de la boule tirée. La deuxième question va vers une généralisation de la situation traitée dans la première question.

Résolution

Partie A

→ *Question 1.a)*

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs suivantes :

- 0. On tire successivement trois boules blanches ;
- 1. On tire, par exemple, une boule noire puis deux boules blanches ;
- 2. On tire, par exemple, une boule blanche puis deux boules noires.

On ne peut prendre de valeurs supérieures à 2 puisque l'urne ne contient que deux boules noires.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.

→ *Question 1.b)*

Pour cette question, nous pouvons nous aider d'un arbre (cf. la page suivante).

Un résultat de l'expérience aléatoire correspondant aux trois tirages peut être décrit par une liste. Par exemple « $B_1N_2B_3$ » si la première boule tirée est blanche, la seconde noire et la troisième blanche.

Dans ces conditions, nous nous intéressons ici à la probabilité : $P(X=0)=P(B_1B_2B_3)$.

On a immédiatement :

$$P(B_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Comme on replace la première boule blanche dans l'urne après l'avoir tirée, on a :

$$P(B_2 \mid B_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Comme on replace la deuxième boule blanche dans l'urne après l'avoir tirée, l'état de l'urne après avoir tiré deux boules blanche est identique à l'état initial et on a :

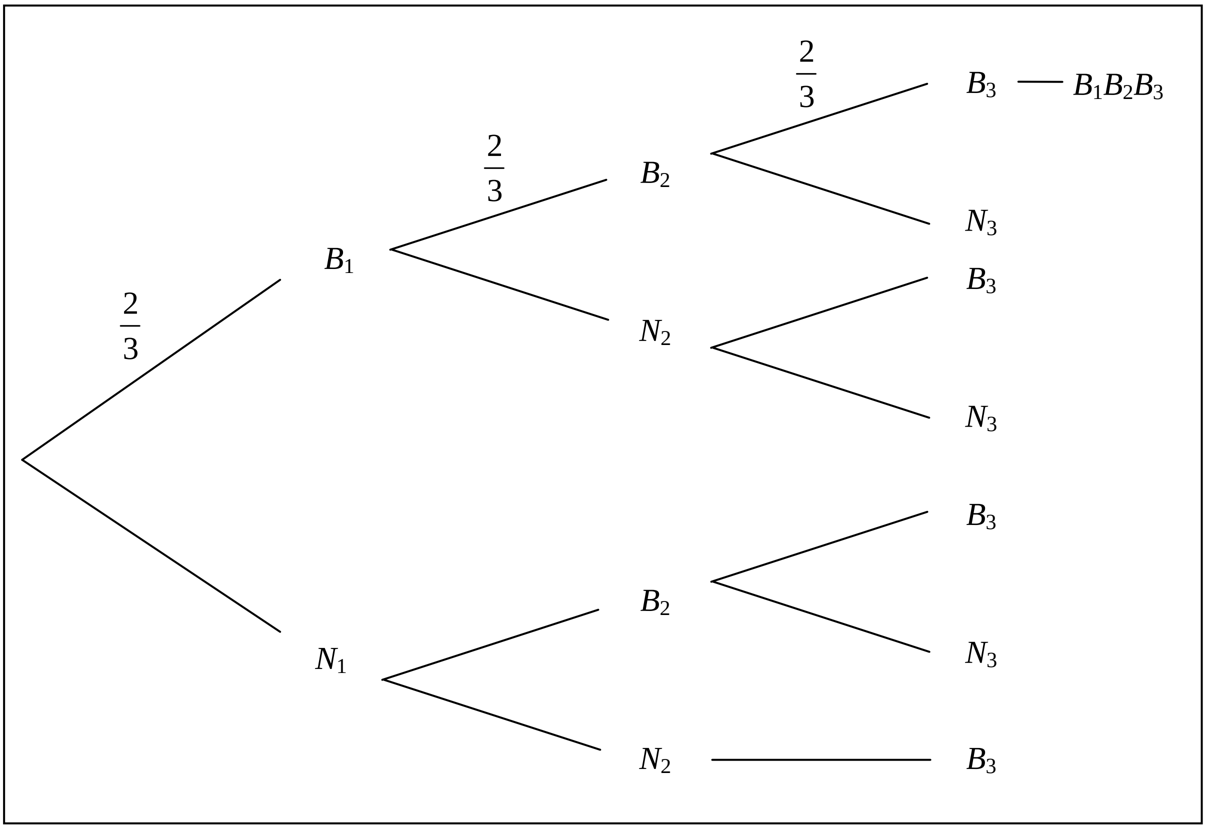
$$P\left(B_3 \mid \left(B_1 \cap B_2\right)\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

En définitive :

$$\begin{aligned} P\left(X = 0\right) &= P\left(B_1 B_2 B_3\right) \\ &= P\left(B_3 \mid \left(B_1 \cap B_2\right)\right) \times P\left(B_1 \cap B_2\right) \\ &= P\left(B_3 \mid \left(B_1 \cap B_2\right)\right) \times P\left(B_2 \mid B_1\right) \times P\left(B_1\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(X = 0\right) = \frac{8}{27}}$$

L'arbre ci-dessous illustre le formalisme mis en place dans la question 1.a) et le calcul mené dans la question 1.b).



→ *Question 1.c)*

Les issues qui réalisent l'événement « $X = 1$ » sont $N_1B_2B_3$, $B_1N_2B_3$ et $B_1B_2N_3$.

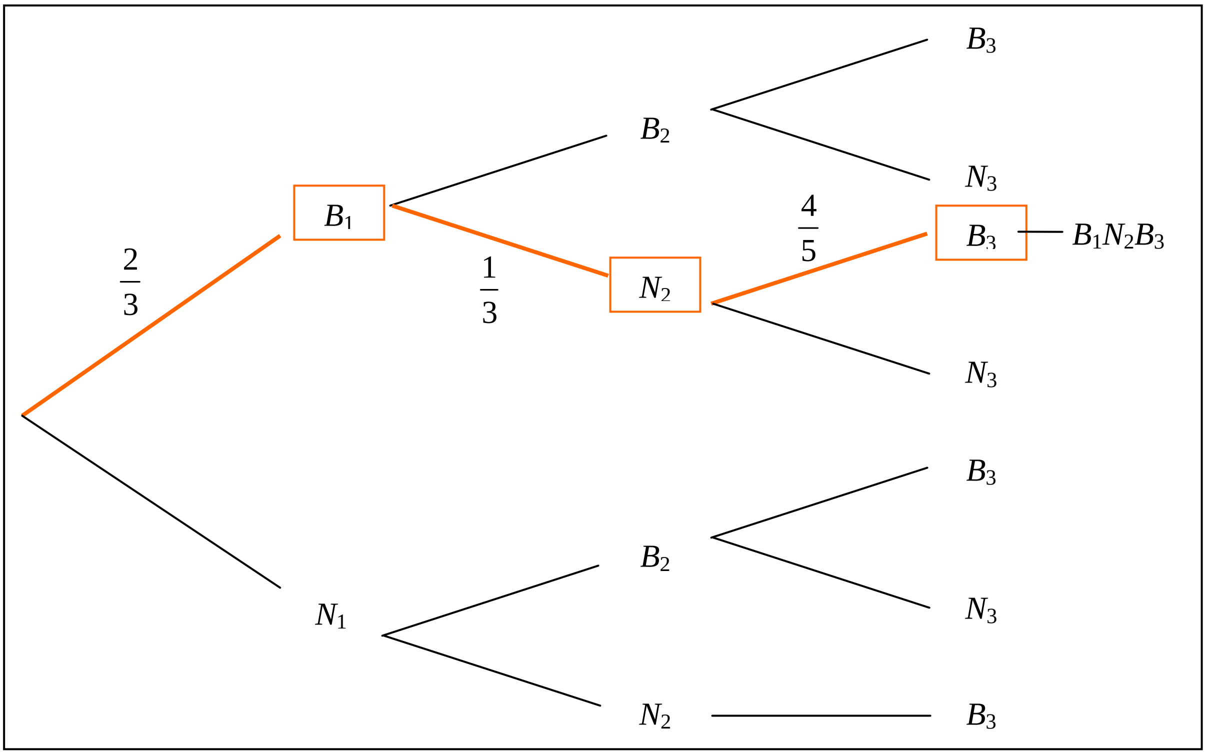
Dans un premier temps, nous nous intéressons à la probabilité $P(B_1N_2B_3)$.

On a vu que l'on avait $P(B_1) = \frac{2}{3}$. Puisque l'on a replacé la boule blanche dans l'urne, on a alors : $P(N_2 \mid B_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Cette deuxième boule, noire, est conservée. A ce stade, l'urne contient 4 boules blanches et une boule noire. On a donc : $P(B_3 \mid (B_1 \cap N_2)) = \frac{4}{5}$. D'où :

$$\begin{aligned} P(B_1N_2B_3) &= P(B_3 \mid (B_1 \cap N_2)) \times P(B_1 \cap N_2) \\ &= P(B_3 \mid (B_1 \cap N_2)) \times P(N_2 \mid B_1) \times P(B_1) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

La probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

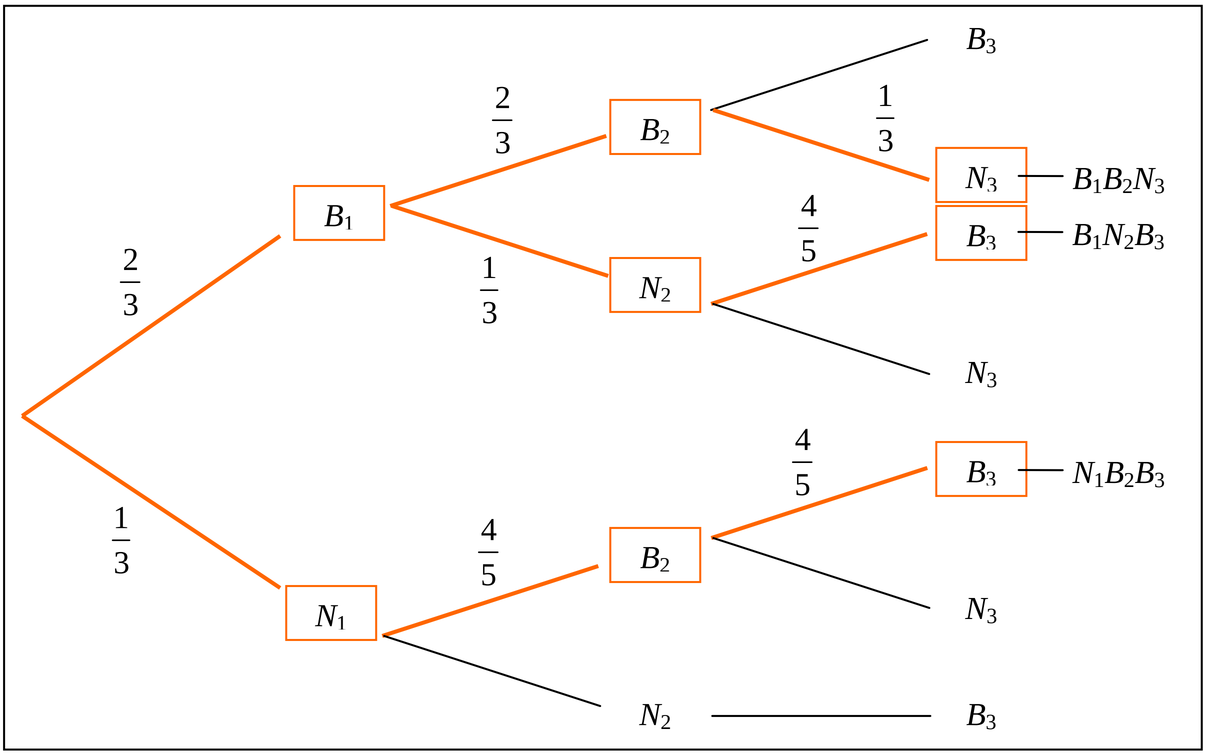
L'arbre ci-dessous illustre la démarche et le calcul précédents.



En raisonnant comme précédemment, on obtient :

$$P\left(B_1B_2N_3\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27} \text{ et } P\left(N_1B_2B_3\right)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{75}$$

L'arbre ci-dessous illustre ces calculs :



Il vient finalement :

$$\begin{aligned}P\left(X=1\right)&=P\left(N_1B_2B_3\right)+P\left(B_1N_2B_3\right)+P\left(B_1B_2N_3\right)\\&=\frac{16}{75}+\frac{8}{45}+\frac{4}{27}\\&=\frac{9\times16+15\times8+25\times4}{675}\\&=\frac{144+120+100}{675}\\&=\frac{364}{675}\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(X=1\right)=\frac{364}{675}}$$

→ *Question 2.*

L'événement $A \cap B$ correspond à « On obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages **et** une boule noire au k-ième **et** une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ». Il s'agit donc simplement de l'événement N.

Dans ces conditions, on a : $P(N) = P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$. On comprend ainsi pourquoi on cherche les probabilités $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$ dans cet ordre.

Commençons par déterminer $P(A)$.

Pour chacun des $k-1$ premiers tirages, on a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'obtenir une boule blanche puisqu'il y a remise de la boule blanche dans l'urne après chaque tirage (l'état de l'urne après remise correspond à son état initial). Une fois les $k-1$ boules blanches tirées (et remises dans l'urne), on a la probabilité $\frac{1}{3}$ de tirer une boule noire. Il vient donc :

$$\boxed{P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}}$$

On suppose maintenant que l'événement A est réalisé.
Une boule noire ayant été tirée au k-ième tirage, l'urne contient donc désormais : une boule noire et quatre boules blanches. La probabilité de tirer une boule blanche vaut alors $\frac{4}{5}$ et, chaque boule blanche tirée étant remise dans l'urne, cette valeur est la même tant que l'on tire une boule blanche.

L'événement A étant réalisé, la probabilité de tirer $(n-k)$ boules blanches vaut : $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$.

$$\boxed{P_A(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}}$$

Forts des résultats précédents et de la remarque initiale, il vient :

$$P(N) = P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{2(n-k)} \times 2^{k-1}}{5^{n-k} \times 3^{k-1} \times 3} = \frac{2^{2n-k-1}}{5^{n-k} \times 3^k}$$

$$\boxed{P(N) = \frac{2^{2n-k-1}}{5^{n-k} \times 3^k}}$$

Complément

Comme pour la première question, nous pouvons introduire la variable aléatoire X et nous intéresser à la probabilité $P(X=1)$. En remarquant, ici encore, que la seule boule noire tirée peut l'avoir été au premier tirage ou au second ou … ou au n-ième, on peut écrire, en tenant compte du résultat obtenu à la question précédente :

$$P(X=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2n-k-1}}{5^{n-k}\times 3^k}$$

Remarquons alors : $\dfrac{2^{2n-k-1}}{5^{n-k}\times 3^k}=\dfrac{2^{2n-1}}{5^n}\times\dfrac{5^k}{2^k\times 3^k}=\dfrac{2^{2n-1}}{5^n}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$. On en déduit :

$$P(X=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2n-k-1}}{5^{n-k}\times 3^k}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{2n-1}}{5^n}\times\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]=\frac{2^{2n-1}}{5^n}\times\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ est celle de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k=\frac{5}{6}\times\left(1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)=\frac{5}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}=5\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$$

Finalement :

$$\begin{aligned}P(X=1)&=\frac{2^{2n-1}}{5^n}\times\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k=\frac{2^{2n-1}}{5^n}\times 5\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]\\&=\frac{2^{2n-1}}{5^{n-1}}\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=\frac{2^{2n-1}}{5^{n-1}}\times\frac{6^n-5^n}{6^n}=\frac{2^{2n-1}}{5^{n-1}}\times\frac{6^n-5^n}{3^n\times 2^n}\\&=\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}\times 3^n}\times\left(6^n-5^n\right)\end{aligned}$$

Avec $n=3$, on obtient :

$$P(X=1)=\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}\times 3^n}\times\left(6^n-5^n\right)=\frac{2^2}{5^2\times 3^3}\times\left(6^3-5^3\right)=\frac{4\times 91}{25\times 27}=\frac{364}{675}$$

On a ainsi retrouvé le résultat obtenu à la question 1.c).