

Pondichéry – Avril 2009 - Exercice

On dispose de deux dés cubiques les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
 - a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
 - b. Quelle est son espérance ?
 - c. Calculer $p(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite. On considère les événements D et A suivants :
 - D : « le dé choisi est bien équilibré » ;
 - A : « obtenir exactement deux 6 ».
 - a. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
 - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».(On pourra construire un arbre de probabilité)
 - b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.
 - c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé choisi n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
 - a. Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'événement B_n .
 - b. Calculer la limite de la suite (p_n) . Commenter ce résultat.

Analyse

La première question est très proche d'une question de cours relative à la loi binomiale. Elle sert de préparation et de guide pour la deuxième question. La deuxième question permet de prendre en compte le fait de jouer avec deux dés (bien équilibré ou truqué) et conduit à un calcul classique de probabilité conditionnelle. La dernière question permet de généraliser un peu la situation en considérant un nombre quelconque de lancers.

Résolution

→ Question 1.a.

L'expérience aléatoire proposée ici consiste en la répétition (3 fois) d'une expérience de Bernoulli (lancer d'un dé) dans laquelle la probabilité de succès (obtenir un 6) est égale à $\frac{1}{6}$ (le dé est bien équilibré). La variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès obtenus, elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$:

$$X \rightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right).$$

→ Question 1.b.

Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p , alors son espérance s'écrit (cf. le cours) : $E(X) = np$. Ici, on obtient : $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

→ Question 1.c.

Pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p , on a pour tout entier k compris entre 0 et n (cf. le cours) : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici, on obtient : $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$.

$$p(X = 2) = \frac{5}{72}$$

→ *Question 2.a.*

Déterminons la probabilité de l'événement « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 ». Cet événement est simplement $D \cap A$.

On a, l'événement D étant de probabilité $\frac{1}{2}$ (les choix des dés sont équiprobables), non nulle :

$p(D \cap A) = p_D(A) \times p(D)$. Or, l'événement « obtenir exactement deux 6 sachant que le dé est bien équilibré » correspond à l'événement « $X = 2$ » dont on a calculé la probabilité à la question 1.c. On a donc :

$$p(D \cap A) = p_D(A) \times p(D) = p(X = 2) \times p(D) = \frac{5}{72} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{144}$$

$$p(D \cap A) = \frac{5}{144}$$

Déterminons maintenant la probabilité de l'événement « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ». Comme l'événement « choisir le dé truqué » correspond à l'événement \bar{D} , on s'intéresse en fait ici à $\bar{D} \cap A$.

On a immédiatement $p(\bar{D}) = \frac{1}{2}$ (les choix des dés sont équiprobables). En raisonnant comme

ci-dessus, il vient alors : $p(\bar{D} \cap A) = p_{\bar{D}}(A) \times p(\bar{D})$.

Pour calculer la probabilité $p_{\bar{D}}(A)$, il suffit de reprendre la démarche de la première question mais en raisonnant cette fois avec le dé truqué. Puisque, pour ce dé, la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\frac{1}{3}$, la loi de la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus après 3 lancers est

encore une loi binomiale mais cette fois de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$. Dans ces conditions, la

probabilité d'obtenir deux 6 est égale à : $\binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

On a donc : $p_{\bar{D}}(A) = \frac{2}{9}$.

D'où :

$$p(\bar{D} \cap A) = p_{\bar{D}}(A) \times p(\bar{D}) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

$$p(\bar{D} \cap A) = \frac{1}{9}$$

→ *Question 2.b.*

On a : $p(A) = p(A \cap D) + p(A \cap \bar{D})$.

Soit, en tenant compte des résultats obtenus à la question précédente :

$$p(A) = p(A \cap D) + p(A \cap \bar{D}) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{5}{144} + \frac{16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{3 \times 7}{3 \times 48} = \frac{7}{48}$$

On a bien :

$$p(A) = \frac{7}{48}$$

→ Question 2.c.

Dans cette question, on cherche la probabilité de l'événement « Avoir choisi le dé truqué sachant que l'on a obtenu deux 6 », c'est-à-dire : $p_A(\bar{D})$.

Par définition : $p_A(\bar{D}) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(A)}$, soit en utilisant les résultats des deux questions précédentes :

$$p_A(\bar{D}) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{3 \times 16}{3 \times 21} = \frac{16}{21}$$

La probabilité d'avoir choisi le dé truqué sachant que l'on a obtenu exactement deux 6 est égale à $\frac{16}{21}$.

→ Question 3.a.

Nous allons ici considérer l'événement contraire : \bar{B}_n : « on obtient aucun 6 parmi les n lancers successifs ».

Pour calculer $p(\bar{B}_n)$, nous allons, comme à la question précédente, utiliser les événements D et \bar{D} , qui forment une partition de l'univers :

$$p(\bar{B}_n) = p(\bar{B}_n \cap D) + p(\bar{B}_n \cap \bar{D}) = p_D(\bar{B}_n) \times p(D) + p_{\bar{D}}(\bar{B}_n) \times p(\bar{D})$$

Les choix des dés étant équiprobables, on a encore : $p(D) = p(\bar{D}) = \frac{1}{2}$ et on a donc :

$$p(\bar{B}_n) = \frac{1}{2} [p_D(\bar{B}_n) + p_{\bar{D}}(\bar{B}_n)]$$

Pour un dé donné, la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus parmi les n lancers, suit encore une loi binomiale. Cette fois, son premier paramètre est n (on effectue n lancers). Quant au second, que nous notons p , il vaut $\frac{1}{6}$ dans le cas du dé bien équilibré et $\frac{1}{3}$ dans le cas du dé truqué.

La probabilité de n'obtenir aucun 6 est la probabilité que la variable aléatoire considérée prenne la valeur 0 :

$$\binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$$

Dans le cas du dé bien équilibré, on a donc : $p_D(\overline{B}_n) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Dans le cas du dé truqué, il vient : $p_{\overline{D}}(\overline{B}_n) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$\text{D'où : } p(\overline{B}_n) = \frac{1}{2} \left[p_D(\overline{B}_n) + p_{\overline{D}}(\overline{B}_n) \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right].$$

On en tire alors finalement :

$$p(B_n) = p_n = 1 - p(\overline{B}_n) = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

$$\boxed{p_n = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}$$

→ *Question 3.b.*

Les suites $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$ et $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ sont des suites géométriques de raisons positives strictement

inférieure à 1. On a donc immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Il vient alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \right\} = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1}$$

Que ce soit avec le dé bien équilibré ou avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir un 6 est non nulle. Ainsi, une fois le dé choisi, si on le lance un grand nombre (n) de fois, on obtiendra presque sûrement un 6 parmi les n lancers.