France métropolitaine – Septembre 2005 - Exercice

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. A chaque lancer, on note la couleur de la face cachée.

On considère les événements suivants :
E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des événements E et F, ainsi que la probabilité de E sachant F.

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 156 fois en notant n_i le nombre de fois où chaque face i est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face *i*	1	2	3	4
Effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face i et d^2_{obs} le réel $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$.

On simule 1000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au

hasard 156 fois dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre *i*.
Le 9ème décile de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8.
Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10%, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Analyse

La première partie consiste en des calculs simples de probabilités, la deuxième question faisant intervenir une loi binomiale.
La seconde partie est une question simple de test d'adéquation à une loi équirépartie.

Résolution

Partie A

→ *Question 1.*

On note V_1 l'événement « Au premier lancer, la couleur obtenue est la couleur verte » et V_2 l'événement « Au second lancer, la couleur obtenue est la couleur verte ».
Dans ces conditions, on a : $E = V_1 \cap V_2$.
Les lancers étant indépendants, il vient immédiatement : $p(E) = p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p(V_2)$.

Le dé étant tétraédrique et parfaitement équilibré, la probabilité d'obtenir la face verte est simplement égale au nombre de faces vertes divisé par le nombre total de faces, soit $\frac{1}{4}$.

On a donc : $p(V_1) = p(V_2) = \frac{1}{4}$ et $p(E) = p(V_1) \times p(V_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

$$\boxed{p(E) = \frac{1}{16}}$$

On note maintenant B_1, B_2, R_1 et R_2 respectivement les événements « Au premier lancer, la couleur obtenue est la couleur bleue », « Au second lancer, la couleur obtenue est la couleur bleue », « Au premier lancer, la couleur obtenue est la couleur rouge » et « Au second lancer, la couleur obtenue est la couleur rouge ».

Dans ces conditions, on a : $F = (V_1 \cap V_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)$.
Les événements $V_1 \cap V_2$, $B_1 \cap B_2$ et $R_1 \cap R_2$ étant deux à deux incompatibles, on a :

$$p(F) = p(V_1 \cap V_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2)$$

Le dé a une face verte et une face bleue. On a donc immédiatement :

$$p(B_1 \cap B_2) = p(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{16}$$

Le dé ayant, en revanche, deux faces rouges, on a : $p(R_1) = p(R_2) = \frac{1}{2}$.

D'où : $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p(R_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Finalement :

$$p(F) = p(V_1 \cap V_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{p(F) = \frac{3}{8}}$$

En tenant compte de $E \subset F$, il vient :

$$p_F(E) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{p(E)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{p_F(E) = \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p(E) = \frac{1}{16},\ p(F) = \frac{3}{8} \text{ et } p_F(E) = \frac{1}{6}.}}$$

➔ *Question 2.*

La partie décrite à la question précédente correspond à une expérience de Bernoulli de paramètre $p = p(F) = \frac{3}{8}$ (dans la mesure où on s'intéresse plus spécifiquement, dans cette seconde question, à l'événement *F*, événement génériquement baptisé « SUCCES »).

Puisqu'on effectue ici dix parties identiques et indépendantes, la loi de la variable aléatoire *X* donnant le nombre de « SUCCES » obtenus (c'est-à-dire le nombre de fois où l'événement *F* a été réalisé), est la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

On cherche ici $p(X \geq 2)$:

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0 \text{ ou } X = 1) = 1 - \left[p(X = 0) + p(X = 1)\right]$$

On a classiquement :

$$p(X=0)=\binom{10}{0}\times\left(\frac{3}{8}\right)^0\times\left(1-\frac{3}{8}\right)^{10}=1\times1\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}=\left(\frac{5}{8}\right)^{10}$$

Et :

$$p(X=1)=\binom{10}{1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^1\times\left(1-\frac{3}{8}\right)^{9}=10\times\frac{3}{8}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{9}=\frac{15}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^{9}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}p(X\geq 2)&=1-\left[p(X=0)+p(X=1)\right]\\&=1-\left(\left(\frac{5}{8}\right)^{10}+\frac{15}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^{9}\right)\\&=1-\left(\left(\frac{5}{8}\right)^{10}+6\frac{5}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{9}\right)\\&=1-\left(\frac{5}{8}\right)^{10}\times(1+6)\\&=1-7\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}\\&\simeq 0,936\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement *F* au cours des dix parties est égale à $1-7\times\left(\frac{5}{8}\right)^{10}$, soit environ 0,936 à 10^{-3} près.

Partie B

Dans un premier temps, nous pouvons calculer les fréquences F_i :

$$F_1 = \frac{30}{156} = \frac{5}{26},\ F_2 = \frac{48}{156} = \frac{4}{13},\ F_3 = \frac{46}{156} = \frac{23}{78} \text{ et } F_4 = \frac{32}{156} = \frac{8}{39}$$

Nous pouvons alors calculer d^2_{obs}.

$$\begin{aligned}
d^2_{\text{obs}} &= \left(\frac{5}{26}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{23}{78}-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{8}{39}-\frac{1}{4}\right)^2 \\
&= \left(\frac{5\times 6-39}{156}\right)^2 + \left(\frac{4\times 12-39}{156}\right)^2 + \left(\frac{2\times 23-39}{156}\right)^2 + \left(\frac{8\times 4-39}{156}\right)^2 \\
&= \frac{1}{156^2}\left[(-9)^2 + 9^2 + 7^2 + (-7)^2\right] \\
&= \frac{2}{156^2}(81+49) \\
&= \frac{2\times 130}{156^2} \\
&= \frac{65}{78^2} \\
&= \frac{65}{6084}
\end{aligned}$$

On a : $d^2_{\text{obs}} = \frac{65}{6084} \simeq 0{,}010\,7$ à 10^{-4} près.

Or, l'énoncé précise que le 9$^{\text{ème}}$ décile, que nous notons classiquement D_9, de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8. Pour un dé parfaitement équilibré, au moins 90% des valeurs de d^2 sont donc inférieures ou égales à 0,009 8.

Or, ici on a : $d^2_{\text{obs}} > D_9$.
On va donc rejeter l'hypothèse « le dé est bien équilibré » avec un risque d'erreur de 10%.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10%,
nous ne considérons pas le dé comme parfaitement équilibré.