

I. Cette question est une restitution organisée des connaissances.  
On rappelle que si  $n$  et  $p$  sont deux nombres entiers naturels tels

que  $p \leq n$  alors 
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démontrer que pour tout nombre entier naturel  $n$  et pour tout nombre entier naturel  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'événement « obtenir deux jetons blancs ».  
Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à  $\frac{7}{15}$ .

b. On note B l'événement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».

Calculer la probabilité de l'événement B.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

---

## Analyse

La première question du sujet est une démonstration du cours très classique.

La seconde fait appel à des calculs simples de coefficients binomiaux et aborde quelques notions de cours (indépendance, loi de probabilité, espérance, ...) dans un cadre simple.

---

## Résolution

→ *Question I.*

Soit  $p$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n$ .

On a :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p![(n-1)-p]!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p![n-p-1]!} \\ &= \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p![n-p-1]! \times (n-p)} \\ &= \frac{p \times (n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{p \times (n-1)! + (n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! [p + (n-p)]}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Pour tous entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

→ *Question II.1.a.*

Notons  $N$  le nombre total de tirages de deux jetons.

Il s'agit du nombre de façons de choisir 2 objets parmi 10 :

$$N = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

Le sac contenant 7 jetons blancs numérotés, le nombre  $N_A$  de façons de tirer 2 de ces jetons est égal au nombre de façons de choisir 2 objets parmi 7 :

$$N_A = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Les jetons étant indiscernables au toucher, il a équiprobabilité des tirages et il vient :

$$p(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

**La probabilité de l'événement A « obtenir deux jetons blancs » est égale à :**

$$p(A) = \frac{7}{15}$$

→ *Question II.1.b.*

Il y a 4 jetons blancs portant un numéro impair (1, 3, 5 et 7) et il y a 2 jetons noirs portant un numéro impair : 1 et 3. Il y a donc au total 6 jetons portant un numéro impair.

Le nombre  $N_B$  de façons de tirer deux jetons portant des numéros impairs est donc égal au nombre de façon de choisir 6 objets parmi 10 :

$$N_B = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Il vient alors :

$$p(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

**La probabilité de l'événement B « obtenir deux jetons portant des numéros impairs » est égale à :**

$$p(B) = \frac{1}{3}$$

→ *Question II.1.c.*

Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, on a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Puisque nous disposons de  $p(A)$  et  $p(B)$ , il convient de déterminer  $p(A \cap B)$ .

L'événement  $A \cap B$  correspond à : « tirer deux jetons blancs portant des numéros impairs ».  
Il y a 7 jetons blancs et, parmi eux, 4 portent un numéro impair.

Le nombre de façons de tirer deux jetons blancs portant des numéros impairs est donc égal au nombre de façons de choisir deux objets parmi quatre :  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ .

$$\text{On a alors : } p(A \cap B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

$$\text{Or : } p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45} \neq \frac{2}{15}.$$

On en déduit finalement :

**Les événements A et B ne sont pas indépendants.**

→ *Question II.2.a.*

La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs : 0, 1 ou 2.

A la question II.1.a., nous avons calculé :  $p(A) = p(X = 2) = \frac{7}{15}$ .

Il reste donc à calculer :  $p(X = 0)$  et  $p(X = 1)$ .

L'événement «  $X = 0$  » est réalisé pour tout tirage de deux jetons noirs.

Puisqu'il y a au total 3 jetons noirs, le nombre de tirages de 2 jetons noirs est égal à :

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$\text{On en tire immédiatement : } p(X = 0) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}.$$

L'événement «  $X = 1$  » est réalisé pour tout tirage d'exactly un jeton noir et un jeton blanc.

Il y a  $\binom{7}{1} = 7$  façons de tirer un jeton blanc et  $\binom{3}{1} = 3$  façons de tirer un jeton noir.

Il y a donc  $7 \times 3 = 21$  façons de tirer exactement un jeton blanc et un jeton noir.

Il vient alors :  $p(X = 1) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ .

La loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  est donc donnée par le tableau :

$k$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
$p(X = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

→ *Question II.2.b.*

On a, par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^2 k \times p(X = k) \\ &= 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) \\ &= 0 + \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} \\ &= 3 \times \frac{7}{15} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  est égale à  $\frac{7}{5}$