Amérique du Nord – Juin 1989 – Séries C-E – Exercice

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches. On tire p boules au hasard sans remise.

1. Si $n = 5$ et $p = 4$, quelles sont les probabilités :
   a) d'obtenir deux boules rouges et deux boules blanches ?
   b) d'obtenir au moins une boule blanche ?

   On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

2. Si n est un entier quelconque et $p = 2$.
   a) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?
   b) Quel est le sens de variation de la suite (p_n) ?
   c) Déterminer la limite de cette suite.

Analyse

Un exercice de probabilités un peu « ancien » mais qui permet de mettre en pratique la notion de coefficient binomial (à cette époque, les sujets de probabilités mettaient davantage l'accent sur le dénombrement). La question 2 généralise partiellement (le paramètre *p* est fixé) la situation et permet de définir une suite convergente simple dont on va chercher les variations et la limite.

Résolution

Question 1.a)

L'urne contient 5 boules rouges et 10 boules blanches, soit un total de 15 boules.

Le nombre de possibilités de tirer 4 boules parmi 15 est immédiatement donné par :

$$\binom{15}{4} = \frac{15\times \cancel{14}^{7}\times 13\times \cancel{12}}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}} = 15\times 7\times 13$$

Soit A l'événement « Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches ».
On cherche $p(\mathrm{A})$.

Pour déterminer cette probabilité, il convient de déterminer le nombre d'issues réalisant l'événement A. Une telle issue revient à « choisir » :

- 2 boules rouges parmi les 5 : il y a $\binom{5}{2}$ possibilités ;
- 2 boules blanches parmi les 10 : il y a $\binom{10}{2}$ possibilités.

En définitive, le nombre d'issues cherché vaut :

$$\binom{5}{2}\times\binom{10}{2} = \frac{5!}{3!\times 2!}\times\frac{10!}{8!\times 2!} = \frac{5\times \cancel{4}}{\cancel{2}}\times\frac{10\times 9}{\cancel{2}} = 5\times 10\times 9$$

Il vient alors :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{5\times 10\times 9}{15\times 7\times 13} = \frac{\cancel{5}\times 10\times 3\times \cancel{3}}{\cancel{5}\times \cancel{3}\times 7\times 13} = \frac{10\times 3}{7\times 13} = \frac{30}{91}$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir deux boules rouges et deux boules blanches est égale à } \frac{30}{91}.}$$

Question 1.b)

Soit B l'événement « Obtenir au moins une boule blanche ».
On cherche $p(\mathrm{B})$.

La formulation de l'événement B nous conduit à considérer l'événement contraire : « Ne pas obtenir de boule blanche », ce qui équivaut à « obtenir quatre boules rouges ».

Le nombre d'issues réalisant cet événement est donc le nombre de possibilités de « choisir » quatre boules rouges par les cinq de l'urne, soit : $\binom{5}{4}=5$.

Il vient alors : $p(\overline{\mathrm{B}})=\dfrac{5}{15\times 7\times 13}=\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{5}\times 3\times 7\times 13}=\dfrac{1}{3\times 7\times 13}=\dfrac{1}{273}$.

Puis : $p(\mathrm{B})=1-p(\overline{\mathrm{B}})=1-\dfrac{1}{273}=\dfrac{272}{273}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est égale à $\dfrac{272}{273}$.

Question 2.a)

L'urne contient n boules rouges et $2n$ boules blanches, soit un total de $3n$ boules.

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules parmi $3n$ est immédiatement donné par :

$$\binom{3n}{2}=\frac{(3n)!}{(3n-2)!2!}=\frac{3n(3n-1)}{2}$$

Soit C l'événement « Obtenir deux boules de couleurs différentes ».
On cherche $p(\mathrm{C})=p_n$.

Pour déterminer cette probabilité, il convient de déterminer le nombre d'issues réalisant l'événement C. Une telle issue revient à « choisir » :

- 1 boule rouge parmi les n : il y a n possibilités !
- 1 boule blanche parmi les $2n$: il y a $2n$ possibilités !

En définitive, le nombre d'issues cherché vaut : $n\times 2n=2n^2$ et il vient alors :

$$p(\mathrm{C})=p_n=\frac{2n^2}{\frac{3n(3n-1)}{2}}=\frac{4n^2}{3n(3n-1)}=\frac{4n}{3(3n-1)}$$

La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $p_n=\dfrac{4n}{3(3n-1)}$.

Question 2.b)

La probabilité p_n est de la forme $f(n)$ avec $f(n)=\dfrac{4n}{3(3n-1)}$.

Pour étudier les variations de la suite (u_n), il nous suffit donc de déterminer les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[1;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle et pour tout *x* de $[1;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{4}{3}\times\frac{1\times(3x-1)-x\times 3}{(3x-1)^2}=\frac{4}{3}\times\frac{-1}{(3x-1)^2}$$

Pour tout *x* de l'intervalle $[1;+\infty[$, le dénominateur de $\dfrac{-1}{(3x-1)^2}$ est strictement positif (carré d'un réel non nul). Le numérateur étant strictement négatif, on en déduit que le rapport $\dfrac{-1}{(3x-1)^2}$ est strictement négatif sur l'intervalle $[1;+\infty[$. La fonction f' est donc strictement négative sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et la fonction *f* est strictement décroissante sur cet intervalle.

En définitive :

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Question 2.c)

A la question 2.a), on a obtenu : $p_n=\dfrac{4n}{3(3n-1)}$. L'expression étant rationnelle, il vient immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{3(3n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{3\times 3n}=\frac{4}{9}$$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n=\frac{4}{9}$$