Amérique du Nord – Mai 2011 – Série S – Exercice

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leq t)$, est donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de pannes au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donner une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux à une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

Analyse

Dénombrement, loi exponentielle (avec un calcul, peu fréquent dans les annales de BAC, d'une probabilité conditionnelle) et loi binomiale sont au cœur de cet exercice : une fois encore, ce n'est pas la difficulté qui est recherchée mais une large « couverture » d'un thème donné du programme de Terminale S (probabilités ici). On ne peut à nouveau que conseiller à l'élève d'être particulièrement soigneux(se) au niveau de la rédaction : même si les formules semblent « évidentes », la rédaction doit permettre d'identifier clairement l'expérience considérée, l'univers associé et les événements dont on recherche les probabilités.

Résolution

Partie A

Nous sommes, d'après l'énoncé, dans une situation d'équiprobabilité pour ce qui est de choisir un ordinateur. Il en va ainsi de même pour ce qui est de choisir deux ordinateurs.

Il y a : $\binom{25}{2} = \frac{25!}{23!2!} = \frac{25\times 24}{2} = 25\times 12 = 300$ possibilités de choisir deux objets (ici deux ordinateurs) parmi 25.

Il y a : $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ possibilités de choisir deux ordinateurs parmi les trois défectueux.

Ainsi, la probabilité p de l'événement considéré est égale à :

$$p = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0,01$$

La probabilité que les deux ordinateurs choisis soient défectueux est égale à 0,01.

Partie B

Question 1.

On a : $p(X > 5) = 0,4$.

Or : $p(X > 5) = 1 - p(X \le 5)$ et $p(X \le 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx$.

On a donc : $0,4 = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx$, soit : $\int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,6$.

Or : $\int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = -e^{-5\lambda} - \left(-e^{-0}\right) = 1 - e^{-5\lambda}$.

On a alors :

$$\int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,6 = 1 - e^{-5\lambda}$$

$$\Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4$$

$$\Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0,4 = \ln \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{5}\ln\frac{5}{2} \simeq 0,18 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Question 2.

L'ordinateur considéré n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années. L'événement « $X > 3$ » est donc réalisé et on cherche la probabilité :

$$p(X > 5 \mid X > 3)$$

On a alors :

$$p(X > 5 \mid X > 3) = \frac{p(X > 5 \cap X > 3)}{p(X > 3)}$$

$$= \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{1 - p(X \leq 5)}{1 - p(X \leq 3)}$$

$$= \frac{1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-2\lambda}$$

$$= e^{-0,36} \simeq 0,698$$

Pour un ordinateur n'ayant pas eu de panne au cours des trois premières années, la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à cinq ans est de $e^{-0,36}$, soit 0,698 à 10^{-3} près.

Question 3.a.

On considère la variable aléatoire N donnant le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. On cherche : $p(N \geq 1)$.

On a : $p(N \geq 1) = 1 - p(N < 1) = 1 - p(N = 0)$.

On cherche $p(N = 0)$ et on s'intéresse donc à l'événement « aucun ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans ».

La situation peut être modélisée par un schéma de Bernoulli où l'événement SUCCES correspond à « l'ordinateur considéré a une durée de vie supérieure à 5 ans ». Les paramètres associés sont : $p = 0,4$ et $n = 10$ (le nombre d'ordinateur). Dans ces conditions, la variable aléatoire N comptabilise le nombre de réalisations de l'événement SUCCES et suit une loi binomiale de paramètres 0,4 et 10.

On a donc : $p(N=0) = \binom{10}{0} \times 0,4^0 \times 0,6^{10} = 0,6^{10} \simeq 0,006$.

Puis : $p(N \geq 1) = 1 - p(N=0) = 1 - 0,6^{10} \simeq 0,994$ à 10^{-3} près.

La probabilité que parmi les dix ordinateurs considérés il y en ait au moins un d'une durée de vie supérieure à 5 ans est de $1 - 0,6^{10}$, soit 0,994 à 10^{-3} près.

Question 3.a.

Par rapport à la question précédente, le nombre n d'ordinateurs est cette fois non fixé et on veut : $p(N \geq 1) \geq 0,999$.

En raisonnant comme précédemment, on a : $p(N \geq 1) = 1 - p(N=0) = 1 - 0,6^n$.

D'où :

$$
\begin{aligned}
& p(N \geq 1) \geq 0,999 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - 0,6^n \geq 0,999 \\
\Leftrightarrow\ & 0,6^n \leq 10^{-3} \\
\Leftrightarrow\ & n \ln 0,6 \leq -3 \ln 10 \\
\Leftrightarrow\ & n \ln \frac{3}{5} \leq -3 \ln 10 \\
\Leftrightarrow\ & -n \ln \frac{5}{3} \leq -3 \ln 10 \\
\Leftrightarrow\ & n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln \frac{5}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 5 - \ln 3}
\end{aligned}
$$

Or : $\frac{3 \ln 10}{\ln 5 - \ln 3} \simeq 13,52$. Le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\frac{3 \ln 10}{\ln 5 - \ln 3}$ est donc 14 et on en conclut finalement :

On doit choisir au moins 14 ordinateurs pour que la probabilité qu'au moins un d'entre ait une durée de vie d'au moins 5 ans soit supérieure à 0,999.