Polynésie – Septembre 2011 – Série ES – Exercice

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70% des ménages pratiquent le tri sélectif.
- Parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40% consomment des produits bio.
- Parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10% consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\bar{T}$ son évènement contraire.
B l'évènement « le ménage consomme des produits bio» et $\bar{B}$ son évènement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale

1. **a.** Donner sans justification la probabilité $p(T)$ de l'évènement T.

   b. Donner sans justification $p_T(B)$ et $p_{\bar{T}}(B)$.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».

   b. Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).

5. Les évènements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.

6. Calculer la probabilité de l'évènement $(T \cup B)$ puis interpréter ce résultat.

7. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen.
Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).
Soit S la somme d'argent reçue par un ménage.

a. Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S ? (on n'attend pas de justification).

b. Donner la loi de probabilité de S.

c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

Analyse

Un exercice de probabilité classique où les principaux thèmes du programme de terminale ES sont abordés : probabilité conditionnelle, probabilités totales, indépendance d'événements, loi de probabilité, espérance … Peu de difficulté mais de la variété. Un sujet dans l'air du temps !

Résolution

Question 1.a.

L'énoncé précise que « 70% des ménages pratiquent le tri sélectif ». On a donc immédiatement :

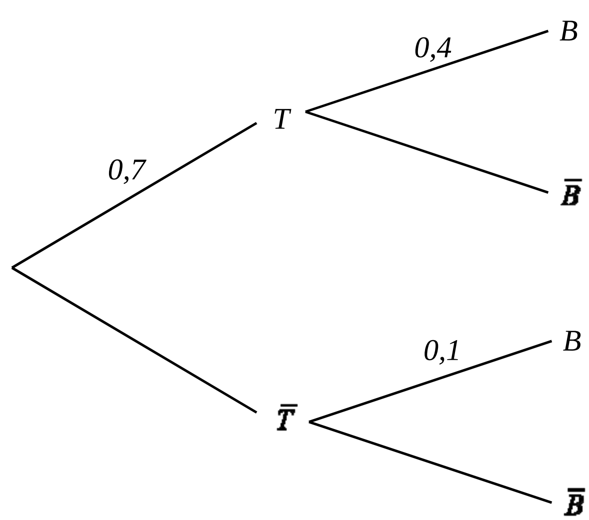
$$p(T) = 70\% = 0,7$$

Question 1.b.

L'énoncé précise que « parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40% consomment des produits bio ». On a donc immédiatement : $p_T(B) = 40\% = 0,4$.
L'énoncé précise également que « parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10% consomment des produits bio ». On a donc immédiatement : $p_{\overline{T}}(B) = 10\% = 0,1$.

$$p_T(B) = 0,4 \text{ et } p_{\overline{T}}(B) = 0,1$$

Question 2.



Question 3.a.

On cherche ici $p(T \cap B)$.
On a, en tenant compte des « résultats » de la question précédente :

$$p(T \cap B) = p_T(B) \times p(T) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$

La probabilité que le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio est égale à : $p(T \cap B) = 0,28$

Question 3.b.

Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers.
La formule des probabilités totales nous donnent donc :

$$p(B) = p(B \cap T) + p(B \cap \overline{T})$$

Nous venons de calculer $p(T \cap B) = 0,28$.
De façon similaire, nous avons :

$$p(B \cap \overline{T}) = p_{\overline{T}}(B) \times p(\overline{T}) = p_{\overline{T}}(B) \times (1 - p(T)) = 0,1 \times (1 - 0,7) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$$

Il vient donc : $p(B) = p(B \cap T) + p(B \cap \overline{T}) = 0,28 + 0,03 = 0,31$.

La probabilité que le ménage consomme de produits bio est égale à 0,31.

Question 4.

On cherche ici $p_B(T) = \frac{p(T \cap B)}{p(B)}$.
Les probabilités apparaissant dans le rapport sont connues :

$$p_B(T) = \frac{p(T \cap B)}{p(B)} = \frac{0,28}{0,31} = \frac{28}{31} \simeq 0,90$$

La probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio est égal à $\frac{28}{31}$ soit 0,90 (valeur arrondie au centième).

Question 5.

Aucun nouveau calcul n'est nécessaire.
Si les événements T et B étaient indépendants, la réalisation de l'un ne serait pas conditionnée par celle de l'autre. En d'autres termes, on aurait (par exemple) : $p_T(B) = p(B)$.

Or, on a : $p_T(B) = 0,4$ et, d'après la question 3.b., $p(B) = 0,31$.

Ces deux probabilités n'étant pas égales, on en conclut que les deux événements ne sont pas indépendants.

Les événements T et B ne sont pas indépendants.

Question 6.

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} p(T \cup B) &= p(T) + p(B) - p(T \cap B) \\ &= 0,7 + 0,31 - 0,28 \\ &= 0,73 \end{aligned}.$$

On en conclut :

73% des ménages pratiquent le tri sélectif ou consomment des produits bio.

Question 7.a.

La somme S peut prendre quatre valeurs : 0, 10, 20 ou 30.

La somme S peut prendre les valeurs 0, 10, 20 ou 30.

Question 7.b.

La somme S prend la valeur $30 = 20 + 10$ quand le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio. On a donc :

$$p(S = 30) = p(T \cap B) = 0,28$$

La somme S prend la valeur 20 quand le ménage pratique le tri sélectif et ne consomme pas de produits bio. On a donc :

$$p(S = 20) = p(T \cap \overline{B})$$

Comme les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne : $p(T) = p(T \cap \overline{B}) + p(T \cap B)$, d'où :

$$p(T \cap \overline{B}) = p(T) - p(T \cap B) = 0,7 - 0,28 = 0,42$$

On a donc : $p(S=20)=p(T\cap\overline{B})=0,42$.

La somme S prend la valeur 10 quand le ménage ne pratique pas le tri sélectif et consomme des produits bio. On a donc :

$$p(S=10)=p(\overline{T}\cap B)$$

Cette probabilité a été calculée à la question 3.b. : $p(S=20)=p(\overline{T}\cap B)=0,03$.

La somme S prend la valeur 0 quand le ménage ne pratique pas le tri sélectif et ne consomme pas de produits bio. On a donc :

$$p(S=0)=p(\overline{T}\cap\overline{B})$$

On peut calculer cette probabilité de diverses façons.

Comme : $p(S=30)+p(S=20)+p(S=10)+p(S=0)=1$, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}p(S=0)&=1-\left(p(S=30)+p(S=20)+p(S=10)\right)\\&=1-(0,28+0,42+0,03)\\&=1-0,73\\&=0,27\end{aligned}$$

Mais on a également (formule des probabilités totales) : $p(\overline{T}\cap\overline{B})+p(\overline{T}\cap B)=p(\overline{T})$.
D'où :

$$\begin{aligned}p(\overline{T}\cap\overline{B})&=p(\overline{T})-p(\overline{T}\cap B)\\&=1-p(T)-p(\overline{T}\cap B)\\&=1-0,7-0,03\\&=1-0,73\\&=0,27\end{aligned}$$

Finalement :

La loi de probabilité de S est donnée par :

s	0	10	20	30
$p(S=s)$	0,27	0,03	0,42	0,28

Question 7.c.

L'espérance $\mathrm{E}(S)$ de la loi obtenue à la question précédente est donnée par :

$$\mathrm{E}(S) = 0\times 0,27+10\times 0,03+20\times 0,42+30\times 0,28 = 0,3+8,4+8,4 = 17,1$$

Ainsi, les ménages recevront en moyenne de la ville une somme de 17,1€.

L'espérance de la loi est de 17,1. Ainsi, les ménages recevront en moyenne de la ville une somme de 17,1€.