Amérique du Nord – Juin 2010 – Série S – Exercice

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20% des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10% sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal 2.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).
   - **a.** Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
   - **b.** Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égal à 0,99.

Analyse

Une situation classique mais avec un énoncé qui laisse l'élève libre d'introduire ses propres notations. Plus que jamais, la rédaction jouera un rôle déterminant dans la qualité des réponses.

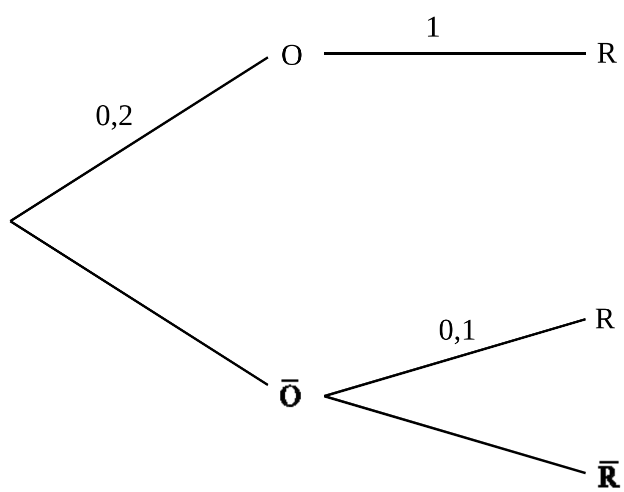
Résolution

Question 1.

Commençons par définir les événements suivants :
R : « la boule tirée est rouge »
O : « la boule tirée porte le numéro 1 »

Remarquons immédiatement que toutes les boules portant le numéro 1 sont rouges (l'inverse n'est pas vrai) et que l'on a donc : $\text{O} \subset \text{R}$.

D'après les données fournies, on a alors l'arbre suivant :



Les événements O et $\overline{\text{O}}$ forment une partition de l'univers et la formule des probabilités totales nous donne :

$$p(\text{R}) = p\left(\text{R} \cap \overline{\text{O}}\right) + p\left(\text{R} \cap \text{O}\right)$$

Comme on a : $\text{O} \subset \text{R}$, il vient : $p\left(\text{R} \cap \text{O}\right) = p(\text{O})$.
D'après l'énoncé, cette probabilité vaut 20%, soit 0,2.

On a ensuite : $p\left(\text{R} \cap \overline{\text{O}}\right) = p_{\overline{\text{O}}}(\text{R}) \times p\left(\overline{\text{O}}\right) = p_{\overline{\text{O}}}(\text{R}) \times \left(1 - p(\text{O})\right)$.

D'après l'énoncé, 10% des boules portant le numéro 2 sont rouges. On a donc :
$p_{\overline{O}}(R) = 10\% = 0,1$.

Finalement :

$$\begin{aligned} p(R) &= p\left(R \cap \overline{O}\right) + p(R \cap O) \\ &= p_{\overline{O}}(R) \times \left(1 - p(O)\right) + p(O) \\ &= 0,1 \times (1 - 0,2) + 0,2 \\ &= 0,1 \times 0,8 + 0,2 \\ &= 0,08 + 0,2 \\ &= 0,28 \end{aligned}$$

La probabilité que la boule tirée soit rouge est égale à 0,28.

Question 2.

On cherche ici la probabilité que le numéro de la boule soit le 2 sachant qu'elle est rouge.
On cherche donc : $p_R\left(\overline{O}\right)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle et en tenant compte des valeurs obtenues à la question précédente :

$$p_R\left(\overline{O}\right) = \frac{p\left(R \cap \overline{O}\right)}{p(R)} = \frac{0,08}{0,28} = \frac{8}{28} = \frac{4 \times 2}{4 \times 7} = \frac{2}{7}$$

La probabilité que le numéro de la boule soit le 2 sachant qu'elle est rouge vaut $\frac{2}{7}$.

Question 3.a.

Chaque tirage correspond à une expérience de Bernoulli de paramètre $p = p(O) = 0,2$ (le SUCCES correspondant au tirage d'une boule rouge portant le numéro 1).

Les tirages se faisant avec remise, l'état de l'urne est inchangé à chaque tirage et les expériences de Bernoulli ainsi répétées sont indépendantes.

En définitive, nous avons affaire à un schéma de Bernoulli et le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*. Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de SUCCES, c'est-à-dire au nombre de boules rouges portant le numéro 1 tirées.

On cherche ici la probabilité : $p(X \geq 1)$.

On a classiquement : $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0)$.

La variable aléatoire X prend la valeur nulle lorsque, à chaque tirage, on obtient une boule différente d'une boule rouge portant le numéro 1, i.e. quand l'événement $\overline{\mathrm{O}}$ est réalisé.

Il vient alors : $p(\mathrm{X}=0)=(1-p)^n=(1-0,2)^n=0,8^n$.

Finalement : $p(\mathrm{X}\geq 1)=1-p(\mathrm{X}=0)=1-0,8^n$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 est égale à $1-0,8^n$.

Question 3.b.

Dans cette dernière question on cherche le plus petit entier naturel n tel que l'on ait :

$$p(\mathrm{X}\geq 1)\geq 0,99$$

On a, d'après le résultat obtenu à la question précédente :

$$\begin{gathered}
p(\mathrm{X}\geq 1)\geq 0,99\\
\Leftrightarrow 1-0,8^n\geq 0,99\\
\Leftrightarrow 0,8^n\leq 0,01\\
\Leftrightarrow n\ln 0,8\leq \ln 0,01\\
\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}\simeq 20,64
\end{gathered}$$

Pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 soit supérieure à 0,99 il faut effectuer au moins 21 tirages.