

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) : y' + (1 + \tan x)y = \cos x,$$

$$(E_0) : y' + y = 1$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .
2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que :

$$f(x) = g(x)\cos x$$

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction g est solution de (E_0) .

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Analyse

Un exercice de structure classique où l'on résout une équation différentielle en se ramenant à une autre équation différentielle ayant la forme du cours : $y' = ay + b$.

Résolution

→ *Question 1.*

L'équation (E_0) peut être réécrite : $y' = -y + 1$. Elle est donc de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 1$. Ses solutions s'écrivent, sur tout intervalle de \mathbb{R} et donc, en particulier sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$: $y = Ce^{-ax} - \frac{b}{a} = Ce^{-x} + 1$ où C est une constante réelle quelconque.

Les solutions de l'équation différentielle (E_0) $y' + y = 1$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ sont les fonctions de la forme : $y = Ce^{-x} + 1$, où C est une constante réelle quelconque.

→ *Question 2.*

On considère maintenant deux fonctions dérivables f et g sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et telles que, pour tout x réel de cet intervalle, on ait : $f(x) = g(x)\cos x$.

On en déduit (dérivation d'un produit) : $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $f'(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x$

Il vient alors :

f solution de $(E) \Leftrightarrow$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, f'(x) + (1 + \tan x) f(x) = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (1 + \tan x) g(x)\cos x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x)\cos x - \cancel{g(x)\sin x} + g(x)\cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \cancel{g(x)\cos x} = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x)\cos x + g(x)\cos x = \cos x$$

Or, sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, la fonction cosinus ne s'annule pas. On a donc l'équivalence :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x) \cos x + g(x) \cos x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x) + g(x) = 1 \Leftrightarrow$$

g solution de (E_0)

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et telles que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, f(x) = g(x) \cos x \text{ alors on a l'équivalence :}$$

$$f \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow g \text{ solution de } (E_0)$$

→ Question 3.

D'après la question précédente, dire que f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ équivaut à dire que la fonction $g = \frac{f}{\cos}$ est solution, sur ce même intervalle, de l'équation différentielle (E_0) .

D'après la question 1, on en déduit que pour tout x réel de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on a :

$$\frac{f(x)}{\cos x} = Ce^{-x} + 1$$

Soit :

$$f(x) = (Ce^{-x} + 1) \cos x$$

La condition $f(0) = 0$ équivaut alors à : $(Ce^{-0} + 1) \cos 0$, soit : $C + 1 = 0$. Finalement :

$$C = -1 \text{ et on a : } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, f(x) = (-e^{-x} + 1) \cos x .$$

La solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ qui s'annule en 0 est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, f(x) = (-e^{-x} + 1) \cos x$$