

Dans tout l'exercice,  $\lambda$  désigne un nombre réel de l'intervalle  $]0;1]$ .

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$  vérifiant l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda y \text{ et la condition } y(0) = 1$$

On suppose qu'il existe une solution  $y_0$  de  $(E_\lambda)$  strictement positive sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$  et on pose sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[ : z = \frac{1}{y_0}$ .

Ecrire une équation différentielle simple vérifiée par la fonction  $z$ .

2. Question de cours.

*Pré-requis :*

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = -\lambda y$  sont les fonctions  $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$  où  $C$  est une constante réelle.

- a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution  $z$  de l'équation différentielle

$$(E'_\lambda) : z' = -\lambda(z+1) \text{ telle que } z(0) = 1$$

- b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera  $z_0$ .

On veut maintenant montrer que la fonction  $z_0$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $] -\infty; \frac{1}{2}[$ .

3. a) Démontrer que :

$$\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

On pourra étudier sur  $]0;1]$  la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$ .

b) En déduire que  $\frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$ .

4. En déduire que la fonction  $z_0$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $] -\infty; \frac{1}{2} [$ .

Démontrer alors que  $(E_\lambda)$  admet une solution strictement positive sur  $] -\infty; \frac{1}{2} [$  que l'on précisera.

---

## Analyse

Un exercice plutôt ... original au tour du thème « équations différentielles » qui requiert une bonne connaissance du cours (la présence du paramètre  $\lambda$  fait que nous sommes très proches d'une situation très générale).

---

## Résolution

→ *Question 1.*

La fonction  $y_0$ , strictement positive et définie sur  $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$ , vérifie :

$$\begin{cases} y' = y^2 + \lambda y & (E_\lambda) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction  $z$  est dérivable sur  $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$  comme inverse d'une fonction dérivable sur cet intervalle et ne s'y annulant pas. On a :

$$z' = -\frac{y_0'}{y_0^2} = -\frac{y_0^2 + \lambda y_0}{y_0^2} = -\left(\frac{y_0^2}{y_0^2} + \frac{\lambda y_0}{y_0^2}\right) = -\left(1 + \frac{\lambda}{y_0}\right) = -1 - \lambda \frac{1}{y_0} = -1 - \lambda z$$

Par ailleurs, comme on a :  $y_0(0) = 1$ , il vient immédiatement :  $z(0) = \frac{1}{y_0(0)} = \frac{1}{1} = 1$ .

Finalement :

La fonction  $z = \frac{1}{y_0}$  est solution de l'équation différentielle :

$$z' = -\lambda z - 1 \text{ avec la condition : } z(0) = 1.$$

→ *Question 2.a.*

Le réel  $\lambda$  étant non nul, on a :

$$z' = -(\lambda z + 1) \Leftrightarrow z' = -\lambda \left(z + \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{\lambda}\right)' = -\lambda \left(z + \frac{1}{\lambda}\right)$$

D'après le pré-requis, les solutions de l'équation différentielle  $y' = -\lambda y$  sont les fonctions  $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$  où  $C$  est une constante réelle.

On en déduit :

$$z' = -(\lambda z + 1) \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{\lambda}\right)' = -\lambda \left(z + \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow z + \frac{1}{\lambda} = Ce^{-\lambda x} \Leftrightarrow z = Ce^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$$

L'équation  $(E'_\lambda)$  admet donc des solutions ; ce sont les fonctions  $x \mapsto Ce^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$  où  $C$  est une constante réelle.

Ecrire qu'une telle solution vérifie  $z(0) = 1$  équivaut à  $Ce^{-\lambda \cdot 0} - \frac{1}{\lambda} = 1$ , soit  $C - \frac{1}{\lambda} = 1$ . Cette équation (d'inconnue  $C$ ) admet une solution unique.

Finalement :

L'équation différentielle  $(E'_\lambda)$  admet une unique solution vérifiant  $z(0) = 1$ .

→ *Question 2.b.*

En résolvant :  $C - \frac{1}{\lambda} = 1$ , on obtient :  $C = 1 + \frac{1}{\lambda}$ .

Finalement :

L'unique solution  $z_0$  de l'équation différentielle  $(E'_\lambda)$  qui vérifie  $z(0) = 1$  est définie par :

$$z_0 : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$$

→ *Question 3.a.*

Comme suggéré par l'énoncé, nous pouvons étudier la fonction  $f$  définie sur  $]0;1]$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$$

En fait, nous allons l'étudier sur l'intervalle  $[0;1]$  pour simplifier l'étude du comportement au voisinage de 0.

La fonction  $x \mapsto 1+x$  est dérivable sur  $[0;1]$  en tant que fonction polynôme (affine) et prend ses valeurs dans  $[1;2]$ .

La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et, de fait, sur  $[1; 2]$ .

En définitive, la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable sur  $[0; 1]$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{x}{x+1}$  est définie et dérivable sur  $[0; 1]$  en tant que fonction rationnelle.

Finalement, la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; 1]$  comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel  $x$  de cet intervalle, on a alors :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Pour tout réel  $x$  de  $[0; 1]$ , on a :  $x \geq 0$  et  $x+1 \neq 0$ . On en déduit  $(x+1)^2 > 0$  et  $f'(x) \geq 0$ .

Par ailleurs, sur  $[0; 1]$ , on a :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

On a enfin :  $f(0) = \ln 1 - \frac{0}{1} = 0$ .

On déduit de ce qui précède que pour tout réel  $x$  de  $]0; 1]$  on a :  $f(x) > f(0)$ , c'est-à-dire :

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}.$$

En définitive, le réel  $\lambda$  variant dans l'intervalle  $]0; 1]$  :

$$\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

### → Question 3.b.

le réel  $\lambda$  étant strictement positif, on a l'équivalence :

$$\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda) > \frac{1}{\lambda+1}$$

Par ailleurs :

$$\lambda \in ]0; 1] \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 < \lambda + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\lambda + 1} < 1$$

De  $\frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda) > \frac{1}{\lambda+1}$  et  $\frac{1}{\lambda+1} \geq \frac{1}{2}$  on tire alors :  $\frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$ .

$$\frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$$

→ *Question 4.*

On a l'équivalence :

$$\begin{aligned} z_0(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1) e^{-\lambda x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda + 1} \Leftrightarrow -\lambda x = \ln\left(\frac{1}{\lambda + 1}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Or, on a vu à la question précédente que pour tout réel  $\lambda$  de  $]0;1]$  la quantité  $\frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda)$  était strictement supérieure à  $\frac{1}{2}$ . On ne peut donc trouver  $x$  dans  $] -\infty; \frac{1}{2}[$  tel que l'on ait l'égalité  $x = \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda + 1)$ . L'équation  $z_0(x) = 0$  n'admet donc pas de solution.

$$\text{La fonction } z_0 \text{ ne s'annule pas sur } ] -\infty; \frac{1}{2}[.$$

Reprenons les calculs précédents mais en manipulant cette fois des inégalités. On a :

$$\begin{aligned} z_0(x) < 0 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1) e^{-\lambda x} < 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda x} < \frac{1}{\lambda + 1} \Leftrightarrow -\lambda x < \ln\left(\frac{1}{\lambda + 1}\right) \Leftrightarrow x > \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Pour avoir  $z_0(x) < 0$ , il faudrait que  $x$  soit strictement supérieur à  $\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda + 1)$  et donc à  $\frac{1}{2}$ .

Or  $x$  appartient à l'intervalle  $] -\infty; \frac{1}{2}[$ .

On en déduit finalement que la fonction  $z_0$  est strictement positive sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$ .

La fonction  $z_0$  étant strictement positive sur  $]-\infty; \frac{1}{2}[$ , il en va de même pour la fonction

$$y_0 = \frac{1}{z_0}.$$

Puisque  $z_0(0) = 1$ , on a :  $y_0(0) = \frac{1}{z_0(0)} = 1$ .

Enfin, comme la fonction  $z_0$ , strictement positive, est solution de l'équation différentielle :  $z' = -(\lambda z + 1)$  on a :

$$-\frac{z_0'}{z_0^2} = \frac{\lambda z_0 + 1}{z_0^2} = \frac{\lambda}{z_0} + \frac{1}{z_0^2}$$

C'est-à-dire :

$$\left(\frac{1}{z_0}\right)' = \lambda \frac{1}{z_0} + \left(\frac{1}{z_0}\right)^2$$

On déduit des trois résultats précédents que la fonction strictement positive  $\frac{1}{z_0}$  est solution de

l'équation différentielle  $(E_\lambda)$  avec  $\left(\frac{1}{z_0}\right)(0) = 1$ .

En utilisant l'expression trouvée à la question 2.b. on a :

$$\left(\frac{1}{z_0}\right)(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)e^{-\lambda x} - 1} = \frac{\lambda e^{\lambda x}}{(\lambda + 1) - e^{\lambda x}}$$

Conclusion :

La fonction  $x \mapsto \frac{\lambda e^{\lambda x}}{(\lambda + 1) - e^{\lambda x}}$  est une solution strictement positive sur  $]-\infty; \frac{1}{2}[$  de l'équation différentielle  $(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda y$  avec la condition  $y(0) = 1$ .