

## POLYNESIE – Série S – Juin 1997 – Exercice

On considère dans un plan (P) un triangle équilatéral  $ABC$  de côté  $a$  ( $a$  est un réel strictement positif).

1. Construire le barycentre  $D$  du système  $\{(A;2),(B;-2),(C;-1)\}$ .
2.
  - a. Déterminer  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$  en fonction de  $a$ .
  - b. Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles et que le triangle  $BCD$  est rectangle en  $B$ .
3. Calculer les distances  $CD$ ,  $BD$  et  $AD$  en fonction de  $a$ .
4. Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$  et on désigne par (F) l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $f(M) = 0$ .
  - a. Vérifier que  $C$  appartient à (F).
  - b. Exprimer  $f(M)$  en fonction de la distance  $MD$  et de  $a$ .
  - c. Déterminer et construire (F).
5. Pour tout point  $M$  du plan, on pose  $g(M) = \overline{MC} \cdot \overline{DB} + a^2$ .
  - a. Déterminer l'ensemble (G) des points  $M$  du plan tels que  $g(M) = a^2$ .
  - b. Soit  $I$  le point d'intersection autre que  $C$  des ensembles (F) et (G). Montrer que le triangle  $CDI$  est équilatéral.

---

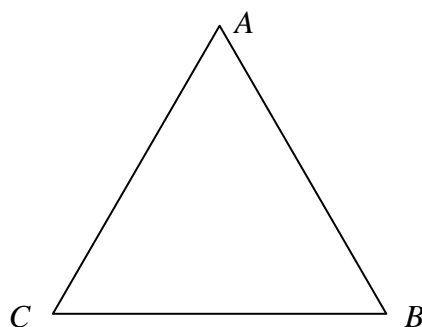
## Analyse

Si cet exercice met en jeu des objets géométriques simples du plan (points, droites, et triangles), il requiert, entre autres, de maîtriser les notions de barycentre et de produit scalaire.

---

## Résolution

→ Question 1.a.



La somme des coefficients du système considéré étant non nul, le point  $D$  est parfaitement défini.

Par définition, on dispose de l'égalité vectorielle :

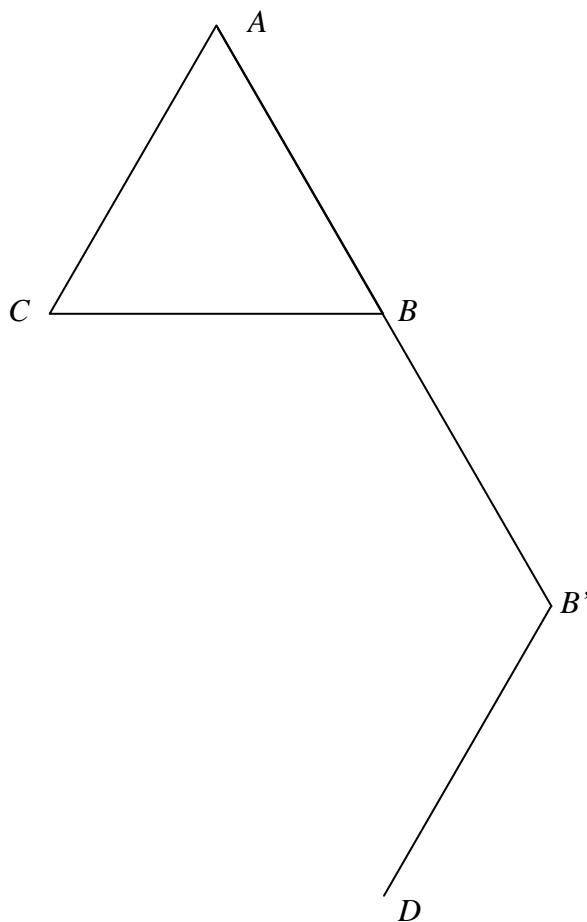
$$2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

On peut transformer cette égalité comme suit de façon à ce que  $D$  n'apparaisse que dans un seul vecteur :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} - 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}} \end{aligned}$$

Pour construire le point  $D$ , on peut donc procéder comme suit (voir la figure correspondante ci-après) :

- Construire, en partant de  $A$ , le vecteur  $2\overrightarrow{AB}$ . On obtient ainsi le vecteur  $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$ .
- Construire, à partir de  $B'$  le vecteur  $\overrightarrow{B'D}$  tel que  $\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{AC}$ .



→ Question 2.a.

On a :  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  et  $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos(\widehat{ABC})$ .

Or  $ABC$  est un triangle équilatéral donc  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

Comme  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , il vient finalement :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} a^2$$

→ Question 2.a.

A partir de la définition vectorielle du point  $D$  on a :

$$\begin{aligned}
2\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow 2\overline{DA} - 2(\overline{DA} + \overline{AB}) - \overline{DC} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow -2\overline{AB} - \overline{DC} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \boxed{\overline{CD} = 2\overline{AB}}
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

**Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.**

Considérons maintenant le produit scalaire  $\overline{BC} \cdot \overline{BD}$ .

$$\text{On a : } \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{BC}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

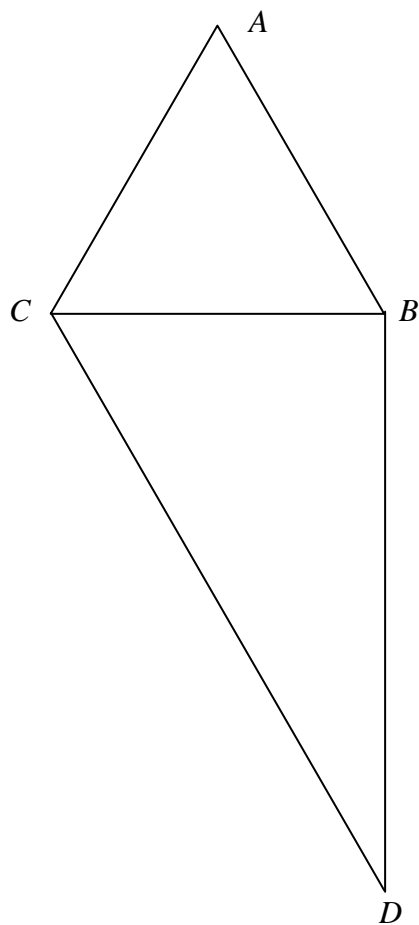
Comme  $\overline{BC}^2 = a^2$  et  $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ , on a alors :  $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = a^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{AB}$

Mais on a calculé :  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}a^2$  et, par ailleurs, on a :  $\overline{BC} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ .

$$\text{Il vient donc : } \overline{BC} \cdot \overline{BD} = a^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{AB} = a^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} = a^2 - 2\left(\frac{1}{2}a^2\right) = 0.$$

Les vecteurs  $\overline{BC}$  et  $\overline{BD}$  sont donc orthogonaux et on en déduit, finalement :

**Le triangle  $BCD$  est rectangle en  $B$ .**



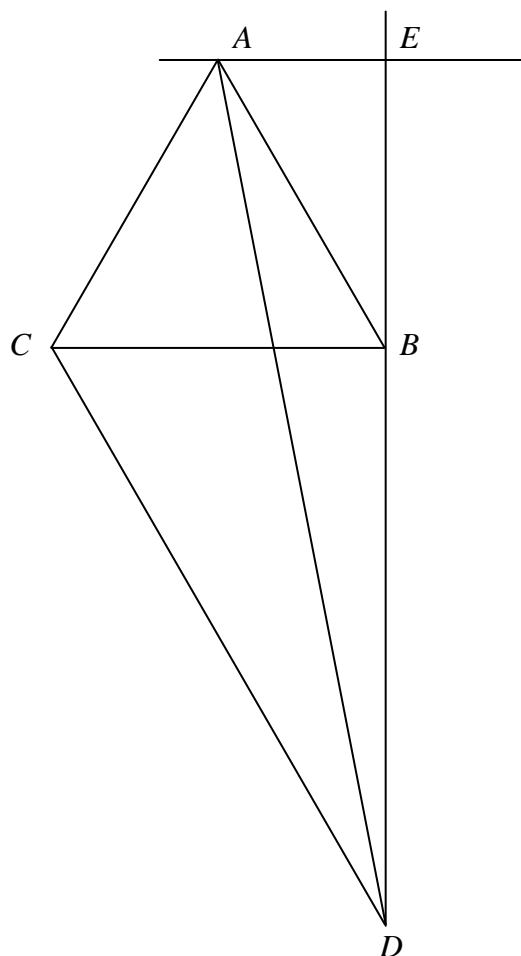
→ *Question 3.*

Comme  $\overline{CD} = 2\overline{AB}$  et  $AB = \|\overline{AB}\| = a$ , il vient :  $\boxed{CD = 2a}$

BCD étant un triangle rectangle en B, on a :  $CB^2 + BD^2 = CD^2$ .

D'où :  $BD^2 = CD^2 - CB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ . Il vient donc :  $\boxed{BD = \sqrt{3}a}$

Pour calculer la distance AD, nous introduisons le point E (voir figure ci-dessous) défini comme suit : la droite (AE) est parallèle à la droite (CB) et E appartient à la droite (BD).



Comme les droites  $(CB)$  et  $(BD)$  sont orthogonales ( $BCD$  est rectangle en  $B$ ), il en va de même pour les droites  $(AE)$  et  $(ED)$  et le triangle  $AED$  est rectangle en  $E$ .

La distance  $EB$  est égale à la hauteur du triangle équilatéral  $ABC$ , soit  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

On a donc :  $ED = EB + BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{3}a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$ .

Par ailleurs,  $AE = \frac{a}{2}$ .

On a donc :  $AD^2 = AE^2 + ED^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{27a^2}{4} = \frac{28a^2}{4} = 7a^2$ .

D'où, finalement :  $AD = \sqrt{7}a$ .

$$CD = 2a, BD = \sqrt{3}a \text{ et } AD = \sqrt{7}a$$

→ Question 4.a.

$$(F) = \{M / f(M) = 0\} = \{M / 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0\}$$

On a :  $f(C) = 2CA^2 - 2CB^2 = 2a^2 - 2a^2 = 0$ . D'où :

$$C \in (F)$$

→ Question 4.b.

Puisque l'on cherche à exprimer  $f(M)$  en fonction de la distance  $MD$  et de  $a$ , il convient de faire apparaître le point  $D$ .

Pour cela, nous allons utiliser des vecteurs :

$$\begin{aligned} f(M) &= 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 \\ &= 2\overline{MA}^2 - 2\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 \\ &= 2(\overline{MD} + \overline{DA})^2 - 2(\overline{MD} + \overline{DB})^2 - (\overline{MD} + \overline{DC})^2 \\ &= -\overline{MD}^2 + 2\overline{MD} \cdot (2\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC}) + (2\overline{DA}^2 - 2\overline{DB}^2 - \overline{DC}^2) \end{aligned}$$

Par définition du point  $D$ , on a :  $2\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC} = \vec{0}$ .

On a donc, pour tout point  $M$  :  $\overline{MD} \cdot (2\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC}) = 0$

Par ailleurs, on a :  $2\overline{DA}^2 - 2\overline{DB}^2 - \overline{DC}^2 = 2 \times 7a^2 - 2 \times 3a^2 - 4a^2 = 4a^2$ .

Il vient donc :  $f(M) = -\overline{MD}^2 + 4a^2 = -MD^2 + 4a^2$ .

$$f(M) = 4a^2 - MD^2$$

→ Question 4.c.

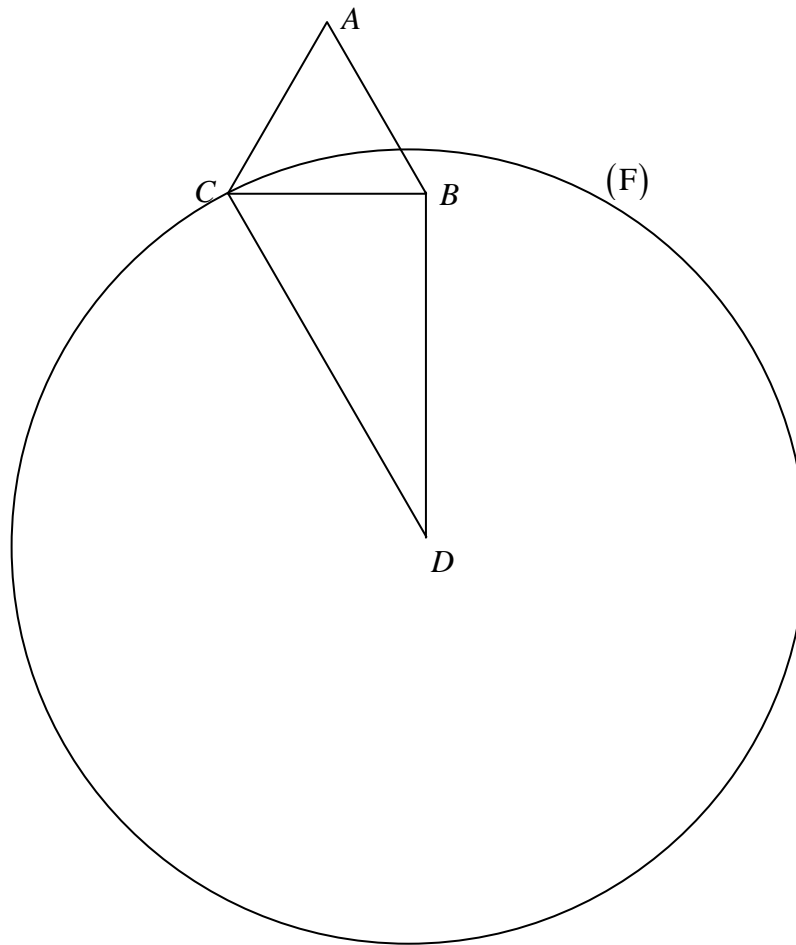
D'après la question précédente, on a :  $(F) = \{M / f(M) = 0\} = \{M / 4a^2 - MD^2 = 0\}$ .

Or,  $4a^2 - MD^2 = 0 \Leftrightarrow MD = 2a$ .

On en déduit que  $(F)$  est l'ensemble des points du plan  $(P)$  dont la distance au point  $D$  est égale à  $2a$ . Soit, en d'autres termes :

**$(F)$  est le cercle de centre  $D$  et de rayon  $2a$ .**

(F) est représenté sur la figure ci-dessous.



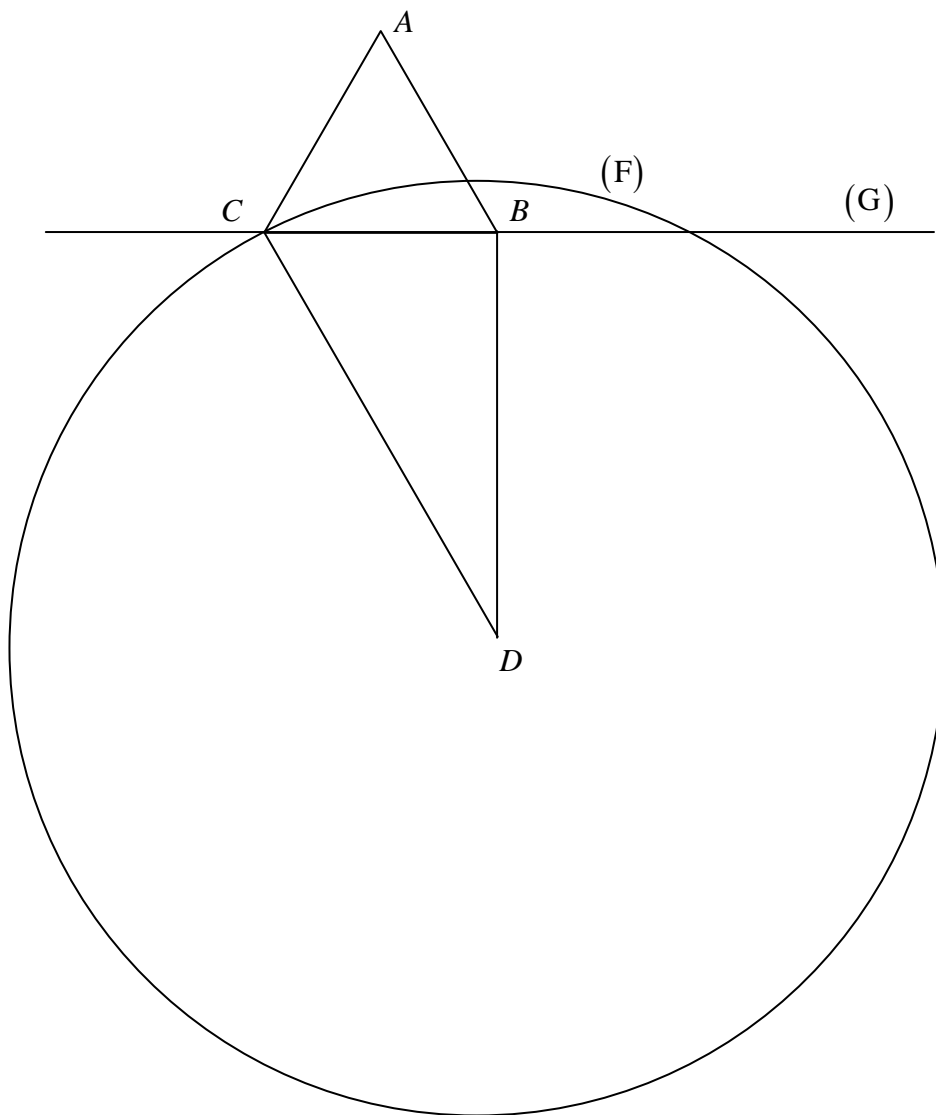
→ Question 5.a.

$$\text{On a : } g(M) = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2 = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Comme les droites  $(BC)$  et  $(DB)$  sont orthogonales, il vient :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

On en déduit alors que l'ensemble  $(G)$  est la droite orthogonale à la droite  $(DB)$  et passant par  $B$ . Il s'agit donc de la droite  $(BC)$ .



→ *Question 5.b.*

Puisque les points  $C$  et  $I$  appartiennent au cercle  $(F)$ , on a :  $DC = DI = 2a$ .

On en déduit que le triangle  $CDI$  est isocèle de sommet principal  $D$ .

Mais  $(DB)$  est la hauteur issue de  $D$  puisque l'on a vu plus haut que  $(DB)$  et  $(BC)$  étaient orthogonales. On en déduit que  $B$  est le milieu de  $[CI]$  et donc que :  $CI = 2BC = 2a$ .

Soit, finalement :  $DC = DI = CI = 2a$ .

**Le triangle  $CDI$  est équilatéral.**

Note : on pouvait aussi, dans le triangle  $CBD$ , considérer l'angle  $\widehat{BCD}$ .

On a :  $\sin(\widehat{BCD}) = \frac{BD}{DC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et on en déduit  $\widehat{BCD} = 60^\circ$ . Résultat permettant de conclure comme précédemment.

