

## PONDICHERY – Série S – Juin 1999 – Exercice

On considère un triangle  $ABC$  du plan.

1.
  - a. Déterminer et construire le point  $G$ , barycentre de  $\left[ (A;1);(B;-1);(C;1) \right]$ .
  - b. Déterminer et construire le point  $G'$ , barycentre de  $\left[ (A;1);(B;5);(C;-2) \right]$ .
  
2.
  - a. Soit  $J$  le milieu de  $[AB]$ .  
Exprimer  $\overline{GG'}$  et  $\overline{JG'}$  en fonction de  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  et en déduire l'intersection des droites  $(GG')$  et  $(AB)$ .
  - b. Montrer que le barycentre  $I$  de  $\left[ (B;2);(C;-1) \right]$  appartient à  $(GG')$ .
  
3. Soit  $D$  un point quelconque du plan.  
Soient  $O$  le milieu de  $[CD]$  et  $K$  le milieu de  $[OA]$ .
  - a. Déterminer trois réels  $a$ ,  $d$  et  $c$  tels que  $K$  soit le barycentre de  $\left[ (A;a);(D;d);(C;c) \right]$ .
  - a) Soit  $X$  le point d'intersection de  $(DK)$  et  $(AC)$ .
  - b. Déterminer les réels  $a'$  et  $c'$  tels que  $X$  soit le barycentre de  $\left[ (A;a');(C;c') \right]$ .

---

## Analyse

Voici un exercice traitant principalement de barycentre. Les questions peuvent être traitées à l'aide de transformations de l'égalité vectorielle servant de définition au barycentre.

---

## Résolution

→ *Question 1.a.*

La somme des coefficients du système considéré étant non nulle, le point  $G$  est parfaitement défini.

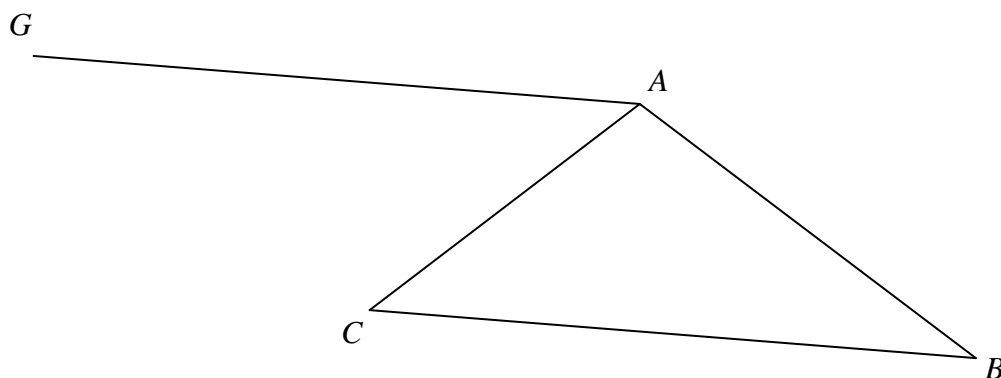
Par définition, on dispose de l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

On peut transformer cette égalité comme suit de façon à ce que  $G$  n'apparaisse que dans un seul vecteur :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}} \end{aligned}$$

Pour construire le point  $G$ , on procède comme suit (voir la figure correspondante ci-dessous) :  
issu de  $A$ , on construit le vecteur  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$ .



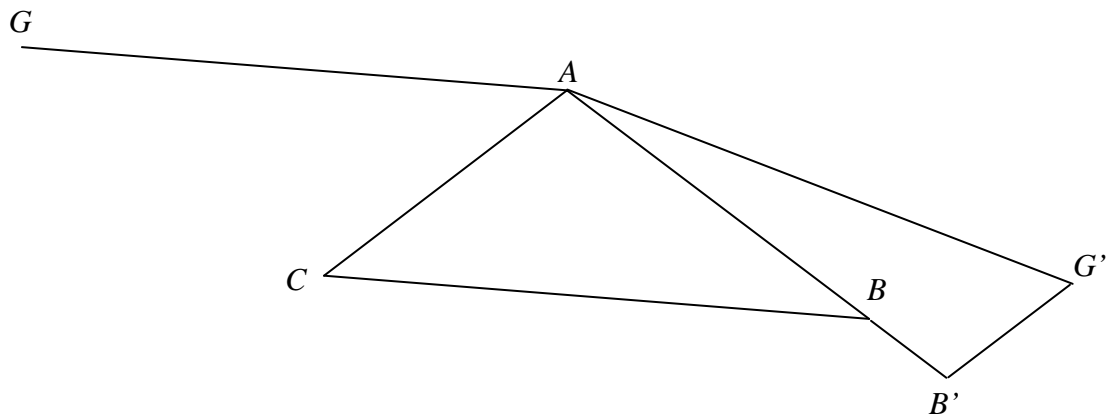
→ Question 1.b.

Nous procédons comme précédemment :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{G'A} + 5(\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}\end{aligned}$$

Pour construire le point  $G'$ , on peut procéder comme suit (voir figure ci-dessous) :

- On construit le point  $B'$  tel que  $\overrightarrow{AB'} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$  ;
- On construit alors le point  $G'$  tel que  $\overrightarrow{B'G'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ .



→ Question 2.a.

Le point  $J$  est le milieu de  $[AB]$ . On a donc  $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ .

On a obtenu, à la question précédente, les deux égalités vectorielles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AG'} &= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \left( \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) - \overrightarrow{BC} \\ &= \left( \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{9}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2} \overrightarrow{AC} = \boxed{\frac{3}{4} (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{3}{4} (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$$

Par ailleurs, en considérant à nouveau l'égalité  $\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ , il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G'A} + 5\overrightarrow{G'B} - 2\overrightarrow{G'C} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{G'J} + \overrightarrow{JA}) + 5(\overrightarrow{G'J} + \overrightarrow{JB}) - 2(\overrightarrow{G'J} + \overrightarrow{JC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{G'J} + (\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{JG'} = \overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} - 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) & \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{JG'} = -\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{AC} & \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{JG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} & \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{JG'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} & \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{JG'} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})} &\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{JG'} = \frac{1}{4} (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$$

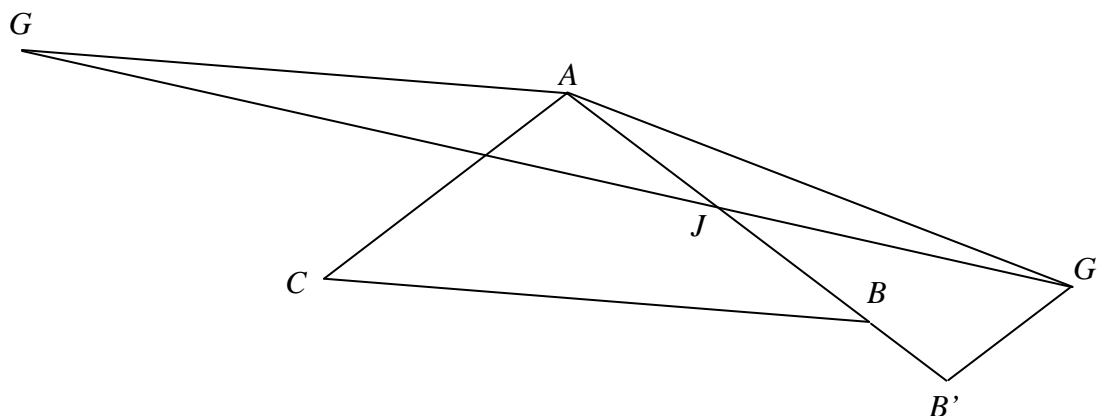
On a donc obtenu :  $\overrightarrow{JG'} = \frac{1}{4} (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$  et  $\overrightarrow{GG'} = \frac{3}{4} (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$ .

Soit, finalement :  $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{JG'}$ .

On en déduit que les points  $G$ ,  $G'$  et  $J$  sont alignés.

Comme  $J$  appartient à la droite  $(AB)$ , on en tire :

**Le point  $J$  est le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(GG')$ .**



→ Question 2.b.

$I$  est le barycentre de  $[(B;2);(C;-1)]$ .

D'après les résultats obtenus précédemment, le vecteur  $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$  est un vecteur directeur de la droite  $(GG')$ .

D'après la définition de  $I$ , on a :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

On en déduit :

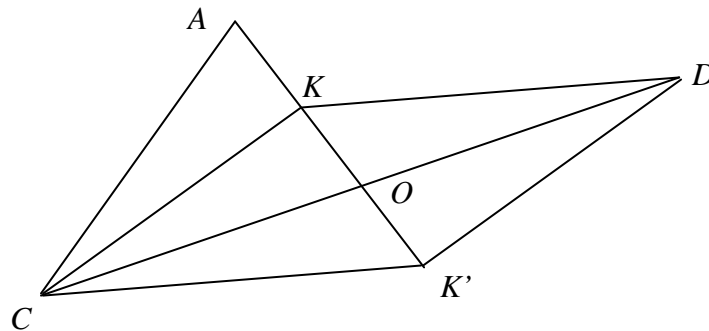
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$$

On déduit de la dernière égalité que le point  $I$  appartient à la droite  $(GG')$ ,  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{JG'}$  étant colinéaires.

**Le point  $I$  appartient à la droite  $(GG')$**

→ Question 3.a.

Une figure permet de « fixer les idées » :



Nous avons introduit le point  $K'$  symétrique de  $K$  par rapport à  $O$ .

Dans ces conditions,  $O$  est le milieu de  $[KK']$  et  $[CD]$  et  $CKDK'$  est un parallélogramme.

On a donc :  $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KK'} = 2\overrightarrow{KO} = 2\overrightarrow{AK}$  car  $K$  est, par construction, le milieu de  $[AO]$ .

On en déduit alors :  $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ , soit, en d'autres termes :

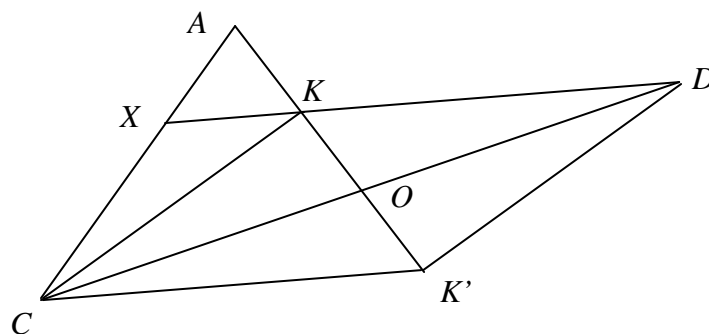
**Le point  $K$  est le barycentre du système :  $[(A;2);(D;1);(C;1)]$ .**

Remarque : un cas particulier doit ici être souligné.

En effet, si  $D$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $A$  (c'est à dire  $A$  est le milieu de  $[CD]$ ), alors  $O = K = A$ .

La relation  $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$  reste cependant valable,  $A$  étant le milieu de  $[CD]$ .

→ Question 3.b.



On suppose ici que les droites  $(DK)$  et  $(AC)$  ne sont pas confondues.

L'égalité vectorielle obtenue à la question précédente peut se récrire comme suit :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{KX} + \overrightarrow{XA}) + \overrightarrow{KD} + (\overrightarrow{KX} + \overrightarrow{XC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (3\overrightarrow{KX} + \overrightarrow{KD}) + (2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Or,  $\overrightarrow{KX}$  et  $\overrightarrow{KD}$  sont deux vecteurs directeurs de la droite  $(DK)$ ,  $\overrightarrow{XA}$  et  $\overrightarrow{XC}$  sont deux vecteurs directeurs de la droite  $(AC)$  et ces deux droites sont sécantes non confondues. On en déduit  $3\overrightarrow{KX} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$  et  $2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$ .

La deuxième égalité nous permet de conclure :

**Le point  $X$  est le barycentre du système  $[(A;2);(C;1)]$ .**

Remarque : si, dans cette question,  $D$  appartient à la droite  $(AC)$ , alors les points  $K$  et  $O$  appartiennent aussi à cette droite et les droites  $(AC)$  et  $(DK)$  sont confondues. Le point  $X$  n'est pas, dans ce cas, défini.