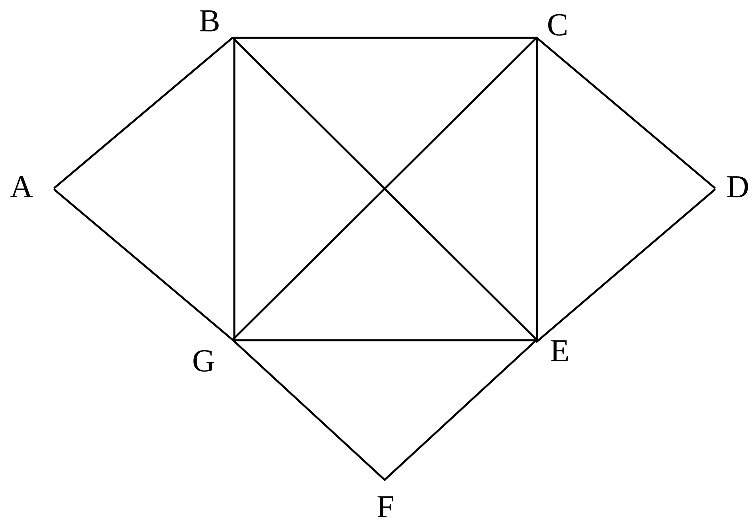
France Métropolitaine – Série ES – Juin 2004 - Exercice

Le graphe ci-dessous indique, sans respecter d'échelle, les parcours possible entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours entre deux bâtiments sont les suivants :
AB : 16 minutes ; AG : 12 minutes ; BC : 8 minutes ;
BE : 12 minutes ; BG : 8 minutes ; CD : 7 minutes ; CE : 4 minutes ;
CG : 10 minutes ; DE : 2 minutes ; EF : 8 minutes ; EG : 15 minutes ;
FG : 8 minutes.
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet. **[1 point]**
2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ?
   Justifier la réponse. [**1 point**]
3. Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.
   En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours. [**3 points**]

Analyse

Cet exercice sur les graphe propose, pour le graphe connexe considéré, deux problèmes de cheminement : recherche de chaîne et/ou cycle eulériens (deux premières questions) et détermination d'un plus court chemin (3ème question).

Résolution

→ *Question 1.*

Il convient dans un premier temps de déterminer si le graphe fourni admet une chaîne eulérienne.

Pour cela, nous déterminons les degrés des sommets du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	4	2	**5**	2	**5**

Deux sommets exactement (E et G) sont de degré impair. Le graphe étant connexe, on en déduit d'après le théorème d'Euler qu'il admet une chaîne eulérienne dont les extrémités seront ces deux sommets.

Exemple d'une telle chaîne :

E-D-C-G-B-E-C-B-A-G-E-F-G

→ *Question 2.*

Il s'agit ici de savoir si le graphe proposé admet un cycle eulérien. Un tel cycle n'existe qu'à la condition que tous les sommets du graphe soient de degré pair.

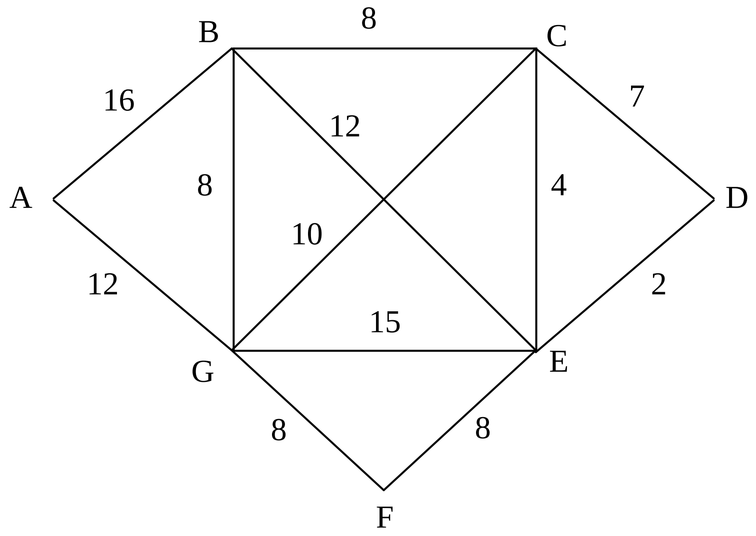
Les sommets E et G étant de degré impair, le graphe proposé n'admet donc pas de cycle eulérien.

L'agent de sécurité ne peut donc pas revenir à son point de départ en ayant parcouru une fois et une seule tous les chemins.

→ *Question 3.*

Nous allons utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Commençons par fournir une représentation du graphe mentionnant les temps de parcours en minutes (voir plus bas).



Dans le tableau suivant, les plus courtes distances du sommet de départ (A) aux différents sommets sont indiquées en gras (par exemple, la plus courte distance du sommet A au sommet F vaut 20 et on arrive en F par le sommet G).

A	**B**	**G**	**C**	**E**	**F**	**D**
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	16 (A)	12 (A)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	16 (A)	**12 (A)**	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	16 (A)		22 (G)	27 (G)	20 (G)	$+\infty$
	16 (A)		22 (G)	27 (G)	20 (G)	$+\infty$
			22 (G)	27 (G)	**20 (G)**	$+\infty$
			22 (G)	27 (G)		$+\infty$
			22 (G)	27 (G)		$+\infty$
				26 (C)		29 (C)
				26 (C)		28 (E)
						28 (E)

D’après le tableau obtenu ci-dessus, on peut affirmer que le parcours le plus court correspond à une durée totale de 28 minutes.

Pour ce qui est des sommets :

- On arrive en D à partir de E ;
- On arrive en E à partir de C ;
- On arrive en C à partir de G ;
- On arrive en G à partir de A.

La chaîne la plus courte est la chaîne : A-G-C-E-D.

L’agent de sécurité devra emprunter le chemin A-G-C-E-D pour que la durée de son parcours de A à D soit la plus faible. Cette durée est de 28 minutes.