Pondichéry – Série ES – Mai 2006 – Exercice

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.

La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.
L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80% de sa clientèle et récupère 15% des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel *n*, on note pour la saison $(2005+n)$:

- a_n la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A),
- b_n la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B),
- $P_n = (a_n \ \ b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste avec $a_n + b_n = 1$.

Les résultats pour les probabilités seront arrondis à 10^{-4} .

1. a. Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets notés A et B.
   b. On note M la matrice de transition de ce graphe. Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & ... \\ 0,15 & ... \end{pmatrix}$.
2. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45% des touristes. On a donc $a_0 = 0,45$.
   a. Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.
   b. Déterminer la matrice P_2 et interpréter ces résultats.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec a et b deux réels positifs tels que $a + b = 1$.
   a. Déterminer a et b tels que $P = P \times M$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

c. Interpréter ce résultat.

4. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est $\frac{3}{7}$. On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres.
Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.

Analyse

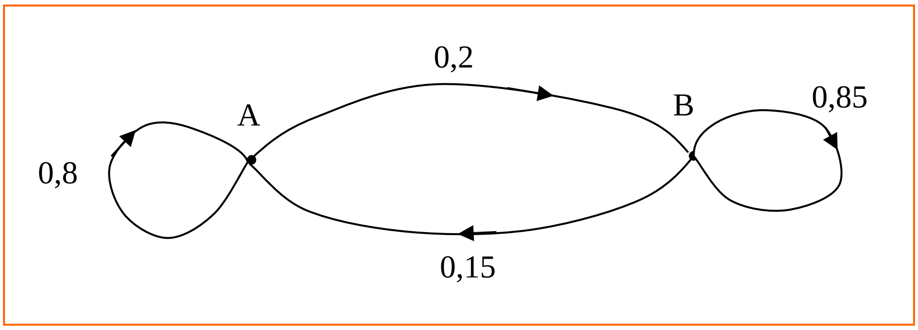
Cet exercice est principalement (Questions 1, 2 et 3) un exercice classique relatif aux graphes probabilistes.
La première question est essentiellement une question de cours.
La seconde question vise à évaluer le niveau de compréhension que le candidat a de la notion d'état probabiliste et de la façon de l'obtenir à partir de puissances de la matrice de transition associée au graphe probabiliste.
Dans la troisième question, on détermine l'état stable associé au graphe probabiliste et on l'interprète classiquement comme limite de la suite des états probabilistes.
La question 4 enfin est une question très classique relative au schéma de Bernoulli. Son énoncé fournit la première composante de l'état stable, $\frac{3}{7}$, et permet ainsi aux candidats de vérifier en partie le travail effectué précédemment.

Résolution

→ *Question 1.a.*

Nous pouvons modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste dont les arêtes et leurs orientations traduisent les évolutions des choix des clients. Par exemple, l'arête reliant les sommets A et B dans ce sens correspond aux clients de la société A choisissant la quittant pour la société B.

Puisque la société A conserve 80% de ses clients d'une année sur l'autre, elle en perd 20%.
Par ailleurs, puisque la société A récupère 15% des clients de la société B, celle-ci en conserve 85%.
Dans le cadre d'un modèle probabiliste, ces pourcentages correspondent à des probabilités et on peut fournir le graphe probabiliste suivant :



→ *Question 1.b.*

Les probabilités précédentes sont réunies dans la matrice de transition M :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,8} & \mathbf{0,2} \\ \mathbf{0,15} & \mathbf{0,85} \end{pmatrix}$$

→ *Question 2.a.*

Puisque $a_0 = 0,45$ on a : $b_0 = 1 - a_0 = 1 - 0,45 = 0,55$. L'état probabiliste initial est donc traduit par la matrice : $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

Puisque l'on s'intéresse, dans cette question, à l'année 2006, on a : $n = 1$.

La probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006 correspond donc à a_1.
Or, on a : $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = P_0 \times M$.

Il vient donc :

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4425 & 0,5575 \end{pmatrix}$$

On a donc : $a_1 = 0,4425$.

La probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006 vaut donc 0,4425.

→ *Question 2.b.*

Pour tout n entier naturel, on a : $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = P_0 \times M^n$.

En particulier, pour $n = 2$, il vient :

$$\begin{aligned} P_2 &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= P_0 \times M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,2475 & 0,7525 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,4376 & 0,5624 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note : les valeurs obtenues à la dernière ligne sont des valeurs arrondies à 10^{-4}.

Finalement :

Comme $P_2 = \begin{pmatrix} 0,4376 & 0,5624 \end{pmatrix}$, on peut en déduire qu'en 2007 environ 43,76% des touristes choisiront la société « Alizés » tandis que 56,24% préfèreront son concurrent.

→ Question 3.a.

On cherche deux réels positifs *a* et *b* tels que $a+b=1$ et $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ vérifie : $P=P\times M$.

L'égalité $P=P\times M$ équivaut à :

$$P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8a+0,15b & 0,2a+0,85b \end{pmatrix}$$

On en tire alors le système :

$$\begin{cases} a=0,8a+0,15b \\ b=0,2a+0,85b \end{cases}$$

Ce système est équivalent à la seule équation : $0,2a-0,85b=0$.

On dispose alors du système :

$$\begin{cases} 0,2a-0,15b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0,2a-0,15b=0 \\ a+b=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a-0,75b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{4}b \\ \dfrac{3}{4}b+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{4}b \\ b=\dfrac{4}{7} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{4}{7} \\ a=\dfrac{3}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

En arrondissant les fractions obtenues à 10^{-4}, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,4286 & 0,5714 \end{pmatrix}}}$$

→ Question 3.b.

On sait que l'état probabiliste $P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ associé à un graphe probabiliste à deux états de matrice de transition *M* converge vers un état stable $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ vérifiant : $P=P\times M$.

C'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P \text{ ou } \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \end{cases}$$

L'état P obtenu à la question précédente est donc l'état stable associé au graphe étudié. On en déduit :

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,4286 \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = 0,5714 \end{cases}$$

On a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,4286}$$

→ *Question 3.c.*

D'après le résultat obtenu à la question précédente, on peut dire que :

Au bout d'un « grand » nombre d'années, le pourcentage de touristes choisissant la société « Alizés » se stabilisera à 42,86% environ.

→ *Question 4.*

L'interrogation d'un touriste peut être assimilée à une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{7}$ (un succès correspondant à l'événement « le touriste choisit la société « Alizés »).

Les choix des quatre touristes interrogés étant indépendants les uns des autres, nous avons affaire à un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{3}{7}$.

On s'intéresse à la probabilité de l'événement « Au moins un des quatre touristes a choisi la société A ». Notons p cette probabilité. Considérons l'événement contraire : « Aucun des quatre touristes interrogés n'a choisi la société A ». Cet événement est réalisé par une seule issue notée « $B_1B_2B_3B_4$ » (le $i$ème touriste interrogé a choisi la société B). Sa probabilité p' vérifie : $p + p' = 1$. Par ailleurs, la probabilité qu'un touriste choisisse la société B vaut $\frac{4}{7}$.

On en déduit : $p' = \left(\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{256}{2401}$.

D'où : $p = 1 - p' = 1 - \frac{256}{2401} = \frac{2145}{2401}$. Soit, en arrondissant à 10^{-4} : 0,8934.

La probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015 vaut 0,8934 (valeur arrondie à 10^{-4}).