

## Liban – Juin 2003 – Série ES – Exercice

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans.

$n$  étant un entier naturel, on note :

- $a_n$ , la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année  $n$  ;
- $b_n$ , la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année  $n$  ;
- $P_0$ , la matrice  $\begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix}$  traduisant l'état probabiliste à l'année  $n$ .

Tous les ans 85% des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55% des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que l'année 0, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial  $P_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix}$ .
2.
  - a. Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
  - b. Déterminer la matrice de transition  $M$  de ce graphe.
  - c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit  $P = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$  l'état stable, où  $x$  et  $y$  sont deux nombres réels positifs tels que  $x + y = 1$ .
  - a. Justifier que  $x$  et  $y$  vérifient l'équation  $x = 0,85x + 0,45y$ .
  - b. Déterminer  $x$  et  $y$ .
  - c. En déduire la limite de la suite  $(a_n)$  quand  $n$  tend vers plus l'infini.
  - d. Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

---

## Analyse

On a affaire ici à un exercice classique portant sur les graphes probabilistes. Il comporte un aspect « calcul matriciel », la détermination de l'état stable et l'interprétation de cet état comme état probabiliste limite.

---

## Résolution

→ *Question 1.*

Les probabilités  $a_0$  et  $b_0$  cherchées correspondent aux proportions de personnes ayant respectivement choisi les abonnements A et B. On a donc, avec les données de l'énoncé :

$$a_0 = \frac{1500}{2500} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } b_0 = \frac{1000}{2500} = \frac{2}{5} = 0,4$$

L'état initial  $P_0$  s'écrit donc :

$$P_0 = [0,6 \quad 0,4]$$

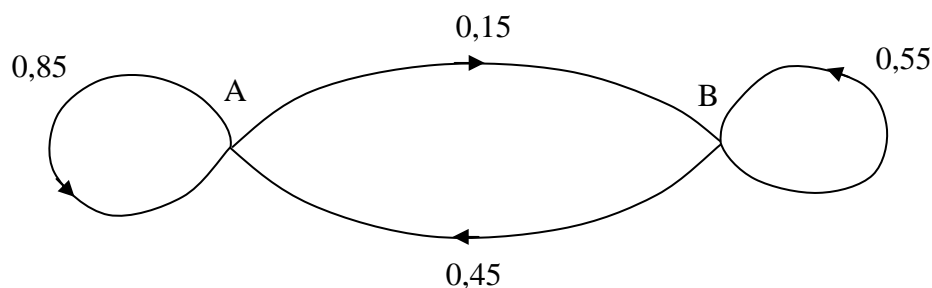
→ *Question 2.a.*

Puisqu'il y a deux types d'abonnement, A et B, le graphe probabiliste comportera deux sommets que nous noterons simplement A et B.

Puisque 85% des personnes ayant choisi l'abonnement A une année le conservent l'année suivante, la probabilité de l'événement « une personne ayant choisi l'abonnement A le conserve l'année suivante » vaut 0,85. La probabilité qu'elle en change vaut donc :  $1 - 0,85 = 0,15$ .

On raisonne de façon analogue avec les personnes ayant choisi l'abonnement B. La probabilité de l'événement « une personne ayant choisi l'abonnement B le conserve l'année suivante » vaut 0,55. La probabilité qu'elle en change vaut donc :  $1 - 0,55 = 0,45$ .

A partir de ces éléments, on obtient le graphe probabiliste suivant :



→ *Question 2.b.*

A partir des probabilités précédentes et en ordonnant naturellement les sommets (A d'abord, puis B), on obtient la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$$

→ *Question 2.c.*

Pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

En particulier, pour  $n = 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \times M \\ &= [0,6 \quad 0,4] \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \\ &= [0,6 \times 0,85 + 0,4 \times 0,45 \quad 0,6 \times 0,15 + 0,4 \times 0,55] \\ &= [0,69 \quad 0,31] \end{aligned}$$

On en déduit que l'année 1, 69% des personnes ont choisi l'abonnement A et 31% l'abonnement B.

Pour obtenir les nombres d'abonnés correspondants, il suffit alors de multiplier chacun de ces pourcentages par le nombre total de personnes considérées :  $0,69 \times 2500 = 1725$  et  $0,31 \times 2500 = 775$ .

Finalement :

**L'année 1, 1 725 personnes ont choisi l'abonnement A et 775 l'abonnement B.**

→ *Question 3.a.*

Par définition de l'état stable, celui-ci vérifie l'égalité :  $P = P \times M$

En posant :  $P = [x \quad y]$ , on obtient :

$$[x \quad y] = [x \quad y] \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$[x \quad y] = [0,85x + 0,45y \quad 0,15x + 0,55y]$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} x = 0,85x + 0,45y \\ y = 0,15x + 0,55y \end{cases}$$

Les égalités sont toutes deux équivalentes à  $0,15x - 0,45y = 0$ . Finalement, le système précédent est équivalent à l'une quelconque des deux égalités. On peut choisir la première. On a bien :

$$x = 0,85x + 0,45y$$

→ *Question 3.b.*

On dispose des deux équations :  $x = 0,85x + 0,45y$  et  $x + y = 1$ . On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 0,85x + 0,45y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 0,15x = 0,45y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On résout alors le système par substitution :

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{L'état stable est } P = [x \quad y] = \left[ \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \right].$$

→ *Question 3.c.*

Puisque la matrice de transition  $M$  ne contient pas de zéro, on sait (théorème du cours) que la suite  $(P_n)$  des états probabilistes tend vers l'état stable  $P$  et ce, quel que soit l'état initial  $P_0$ .

On a donc :  $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ , soit :  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = y \end{cases}$ .

On en déduit ici :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{4}$$

→ *Question 3.d.*

D'après la question précédente, on peut dire que la proportion d'abonnements de type A va converger vers 75%. Or,  $0,75 \times 2500 = 1875$ . On en conclut :

**Le nombre d'abonnements de type A va converger vers la valeur 1 875.**

Bien évidemment, une telle conclusion sous-entend que la matrice de transition  $M$  n'évolue pas dans le temps ... Aspect somme toute assez peu réaliste et qui constitue une des limites d'un tel modèle.