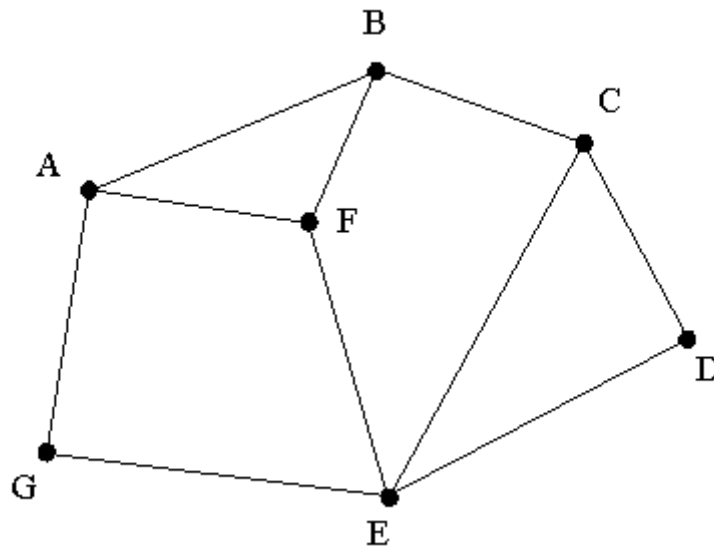


Amérique du Nord – Juin 2003 - Exercice

Soit le graphe G ci-dessous constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G .

1. Quel est son ordre et le degré de chacun de ses sommets ?



2. Reproduire sur la copie et compléter le tableau des distances entre deux sommets de G : en déduire le diamètre de ce graphe.

Distance	A	B	C	D	E	F	G
A	X						
B	X	X					
C	X	X	X				
D	X	X	X	X			
E	X	X	X	X	X		
F	X	X	X	X	X	X	
G	X	X	X	X	X	X	X

3. a. Donner un sous-graphe complet d'ordre 3 de G .
Qu'en déduire pour le nombre pour le nombre chromatique de G ?

- b. Proposer une coloration du graphe G et en déduire son nombre chromatique.

4. Donner la matrice M associée à G (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).
5. En utilisant la matrice M^2 donnée ci-dessous, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

Analyse

L'exercice comprend un ensemble de questions classiques relatives au cours sur les graphes non orientés : diamètre, nombre chromatique, chaînes de longueur donnée en sont les principaux ingrédients.

Résolution

→ *Question 1.*

Le graphe comporte 6 sommets ; il est donc d'ordre 6.

Le graphe G est un graphe d'ordre 6.

Le degré d'un sommet d'un graphe non orienté est le nombre de sommets qui lui sont adjacents. On obtient alors :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	3	2	4	3	2

→ *Question 2.*

La distance entre deux sommets d'un graphe connexe est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets. On a alors :

Distance	A	B	C	D	E	F	G
A	X	1	2	3	2	1	1
B	X	X	1	2	2	1	2
C	X	X	X	1	1	2	2
D	X	X	X	X	1	2	2
E	X	X	X	X	X	1	1
F	X	X	X	X	X	X	2
G	X	X	X	X	X	X	X

La plus grande des distances apparaissant dans le tableau ci-dessus est la distance entre les sommets A et D ; il s'agit du diamètre du graphe.

Le diamètre du graphe G vaut 6.

→ *Question 3.a.*

Le sous-graphe {A,B,F} est un sous-graphe complet d'ordre 3 du graphe G. Si on note $\chi(G)$ le nombre chromatique du graphe G, on a :

$$\chi(G) \geq 3$$

→ *Question 3.b.*

On effectue une coloration du graphe G à l'aide de l'algorithme de Welsh-Powell. Après avoir rangé les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés, on obtient :

Sommet	E	A	B	C	F	D	G
Degré	4	3	3	3	3	2	2
Couleur	jaune	jaune	rouge	bleu	bleu	rouge	rouge

On a pu colorier le graphe à l'aide de trois couleurs. On en déduit alors :

$$\chi(G) \leq 3$$

A partir de cette inégalité et de celle obtenue à la question précédente, on conclut que le nombre chromatique du graphe G est égal à 3 :

$$\chi(G) = 3$$

→ *Question 4.*

En numérotant les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique, la matrice d'adjacence M du graphe G s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ *Question 5.*

La première ligne de la matrice M^2 nous fournit les nombres de chaînes de longueur 2 reliant A aux autres sommets du graphe.

Par exemple, il existe une seule chaîne de longueur 2 d'origine A et d'extrémité C (3^{ème} élément de la première ligne) tandis qu'il n'existe aucune chaîne de longueur 2 d'origine A et d'extrémité D (4^{ème} élément de la première ligne).

Ainsi, pour obtenir le nombre total de chaîne de longueur 2 d'origine A et d'extrémité différente de A, il suffit d'additionner tous les éléments de la première ligne sauf le premier. On obtient ainsi : $1+1+0+2+1+0 = 5$.

Il y a au total 5 chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.