France Métropolitaine – Septembre 2004 - Exercice

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.
On suppose que l'effectif de cette population est stable.
Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.
30% des acheteurs de yaourts achète la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.
Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y ;
- 10% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation ;
2. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
   a. Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent ;
   b. Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3. On admet que pour tout entier naturel *n* on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0,7^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,7^n \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,7^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,7^n \end{pmatrix}$$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70% ? Justifier.

Analyse

Un exercice classique sur les graphes probabilistes qui ne présente pas de difficulté particulière mais requiert surtout de bien interpréter les objets mathématiques utilisés (probabilités de transition, vecteur d'état, matrice de transition, …).

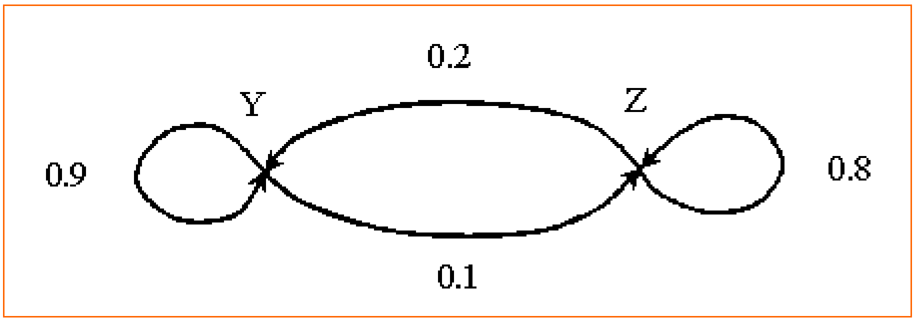
Résolution

→ *Question 1.*

La situation est représentée à l'aide d'un graphe probabiliste comportant 2 sommets :

- Y, correspondant à l'événement « le consommateur achète des yaourts Y » ;
- Z, correspondant à l'événement « le consommateur n'achète pas des yaourts Y ».

D'après les pourcentages fournis dans l'énoncé (interprétés ici comme des probabilités, la population étant supposée « grande »), il vient :



→ *Question 2.a.*

L'état initial de la population est décrit par la matrice ligne $X_0 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé, 0.3 (soit 30%) désigne la part des acheteurs de yaourts achetant la marque Y. Dans ces conditions, les sommets du graphe ci-dessus, doivent être considérés dans l'ordre Y, Z. La matrice A s'écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.9} & \mathbf{0.1} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.8} \end{pmatrix}}$$

→ *Question 2.b.*

Si on note X_n la matrice ligne décrivant l'état de la population au bout de *n* semaines, on a :

$$X_n = X_0.A^n$$

En particulier, pour $n = 2$: $X_2 = X_0.A^2$.

On obtient facilement : $A^2 = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$.

Il vient alors :

$$X_2 = X_0.A^2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.487 & 0.513 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

La probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y vaut 0.487.

Remarque : seule le premier élément de la matrice ligne X_2 nous intéressait ici.

→ *Question 3.*

Grâce à la matrice A^n, nous allons pouvoir déterminer la matrice ligne X_n :

$$X_n = X_0.A^n = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0.7^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0.7^n \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0.7^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0.7^n \end{pmatrix}$$

Seul le premier élément de la matrice ligne X_n nous intéresse ici puisque l'on s'intéresse aux acheteurs de la marque Y. Ce premier élément s'écrit :

$$0.3\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0.7^n\right)+0.7\times\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0.7^n\right)=\frac{2}{3}-\frac{1.1}{3}\times 0.7^n$$

La suite (u_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = -\frac{1.1}{3}\times 0.7^n$ est une suite géométrique strictement croissante (la raison est positive strictement inférieure à 1 et le premier terme est strictement négatif). La suite (v_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = u_n+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1.1}{3}\times 0.7^n$ est donc également strictement croissante. Son premier terme vaut 0.3 et sa limite vaut $\frac{2}{3}$. Plus précisément, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n<\frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3}<0.7$. On a donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n<0.7$.

La probabilité qu'un acheteur achète des yaourts Y ne pourra donc jamais, dans le cadre de ce modèle, atteindre la valeur 0.7 (c'est à dire 70%). Finalement :

L'entreprise ne pourra donc jamais atteindre une part de marché de 70%.