Métropole – Juin 2011 – Série ES – Exercice

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20% de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70% de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10% de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.
Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40% restent à ce niveau et 60% passent au niveau B.
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70% restent à ce niveau et 20% reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C.
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85% restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A ».
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B ».
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010+n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$.

On décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0,2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0,15 & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme que 50% des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

Analyse

Un exercice assez classique sur les graphes probabilistes qui ne nécessite pas de gros calculs mais une bonne connaissance du cours.

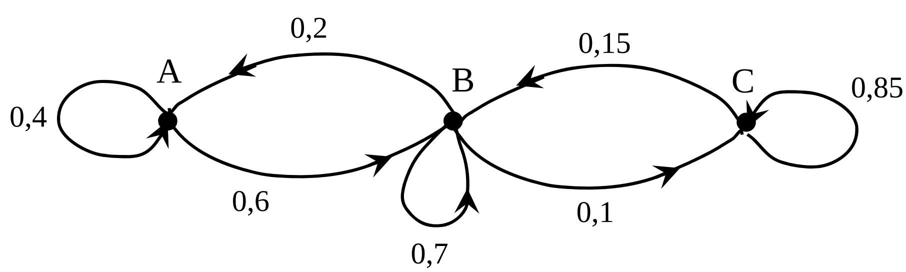
Résolution

Question 1.

On précise que parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70% restent à ce niveau et 20% retourne au niveau A. On en déduit que $100\% - (70\% + 20\%) = 10\%$ passent au niveau C.

On précise également que parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85% restent à ce niveau et que les autres retournent au niveau B. Ces derniers représentent donc $100\% - 85\% = 15\%$ des adhérents ayant choisi le niveau C.

Forts de ces valeurs complémentaires, nous pouvons fournir le graphe probabiliste suivant :



Question 2.

En respectant l'ordre alphabétique des sommets, on obtient immédiatement :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Question 3.

Dans cette question, on cherche fondamentalement (en admettant son existence) l'état stable associé au graphe probabiliste.
On peut adopter deux approches :

- Passer en revue les états représentés par les matrices *Q*, *R* et *T* en la multipliant, à chaque fois, par la matrice *M* et en vérifiant si on retrouve ou pas l'état considéré.
- Rechercher l'état stable $S = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ comme solution de l'équation matricielle $SM = S$ avec $x + y + z = 1$. C'est cette approche que nous développons ici.

On a d'abord :

$$\begin{aligned}
& SM = S \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0,4x + 0,2y & 0,6x + 0,7y + 0,15z & 0,1y + 0,85z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 0,4x + 0,2y = x \\ 0,6x + 0,7y + 0,15z = y \\ 0,1y + 0,85z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2y = 0,6x \\ 0,6x - 0,3y + 0,15z = 0 \\ 0,1y = 0,15z \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{3}y = x \\ 0,6x - 0,3y + 0,15z = 0 \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

La contrainte $x + y + z = 1$ donne alors : $\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}z + z = 1$, soit : $3z = 1$. Finalement : $z = \frac{1}{3}$.

Il vient alors immédiatement : $x = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

L'état stable est donc : $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On a ainsi obtenu la matrice *R*.

Pour *n* grand, la matrice P_n sera proche de la matrice *R*. Ainsi, la suite (b_n) admet pour limite $\frac{1}{2}$ et dans la répartition à terme, près de 50% des adhérents choisiront le niveau B.

$\boxed{\text{L'affirmation du président de l'association est correcte.}}$